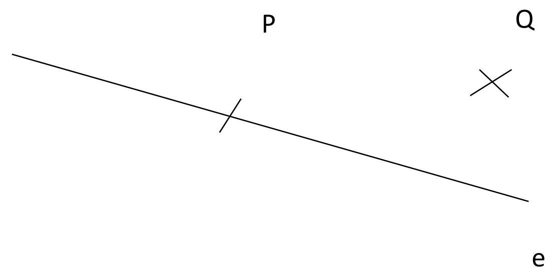
BEVEZETÉS

Alapfogalmak: pont, egyenes, sík, illeszkedik.

P, Q e, f S, R ϵ

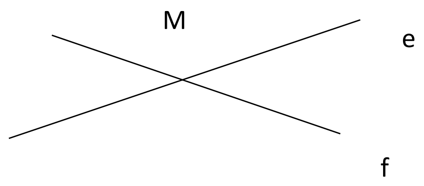
Térelemek kölcsönös helyzete

- Pont-egyenes:
  Egy pont vagy illeszkedik egy egyenesre, vagy nem eleme az egyenesnek, azaz nem illeszkedő.



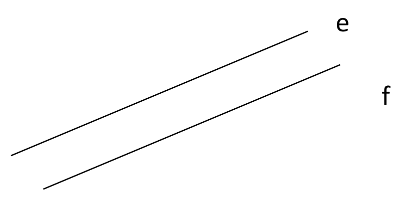
$P \in e; Q \notin e$

- Két egyenes:
  Két egyenes metsző, ha pontosan egy közös pontjuk van:



$e \cap f = M$

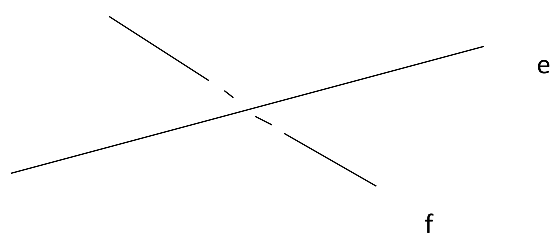
Két egyenes párhuzamos, ha egy síkban vannak, és nem metszik egymást: (Jele: e || f)



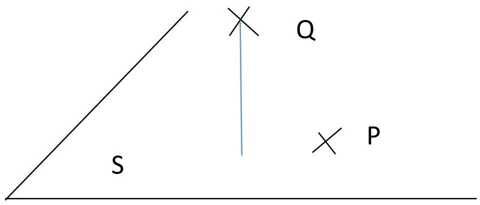
$e, f \in S$

$e \cap f = \emptyset$

Két egyenes kitérő, ha nincsenek egy síkban:

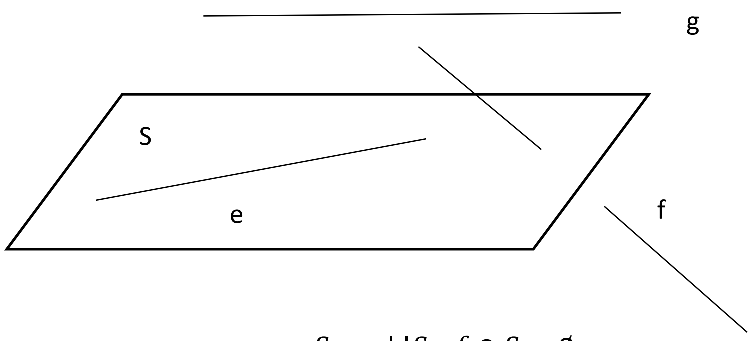


- Pont és sík:
  Egy pont vagy illeszkedik egy síkra, vagy nem eleme a síknak, azaz nem illeszkedő.



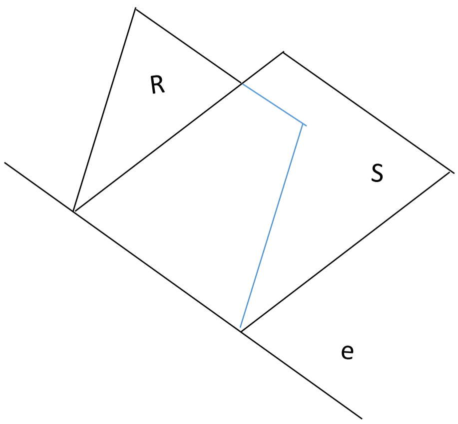
$P \in S; Q \notin S$

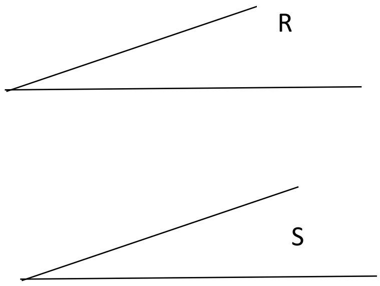
- Egyenes és sík:
  Egy egyenes vagy illeszkedik a síkra, vagy a síkot egy pontban metszi, vagy nincs a síkkal közös pontja, azaz az egyenes és a sík párhuzamosak.



$e \in S; \quad g \,||\, S; \quad f \cap S = \emptyset$

- Két sík:
  Két sík metsző, ha pontosan egy közös egyenesük van.





$R \cap S = e$

$R \,||\, S$

Két egyenes párhuzamos, ha nem metszik egymást.

Alapállítások – Axiómák

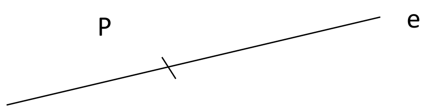
Vannak olyan állítások a geometriában, amelyeket bizonyítás nélkül fogadunk el. Az ilyen állításokat alaptételeknek, axiómáknak nevezzük.

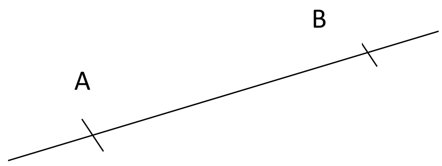
Axiómák:

1. Két pontra egyetlen egyenes illeszkedik.
2. Ha három pont nem illeszkedik egy egyenesre, akkor a három pontra egyetlen sík illeszkedik.
3. Ha egy egyenes két pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egyenes illeszkedik a síkra.
4. Egy egyenesre és egy, nem az egyenesen lévő pontra, egyetlen sík illeszkedik.
5. Két metsző egyenesre egyetlen sík illeszkedik.
6. Egy adott pontra egyetlen olyan egyenes olyan egyenes illeszkedik, amely egy adott egyenessel párhuzamos.

Szakasz, távolság

Az egyenest egy pontja két félegyenesre bontja. Az egyenesnek két pontja közötti részét szakasznak nevezzük.



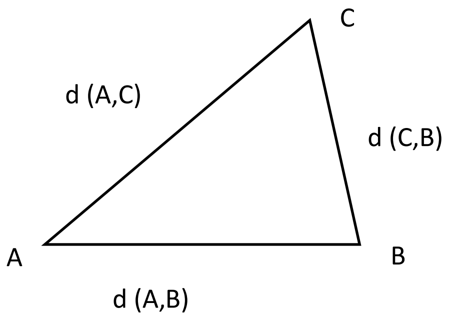


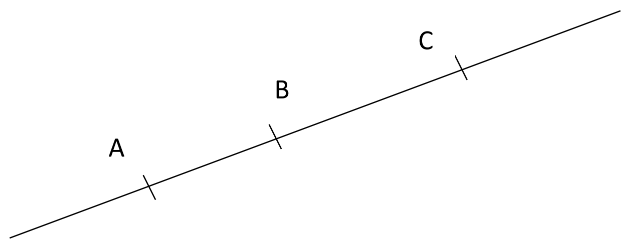
A, illetve B a szakasz két végpontja.
Két szakasz összehasonlítható. Kijelölhetünk két pontot, amelyek távolságát egységnek tekintjük. Így bármely A, B pontokhoz rendelhető egy nemnegatív valós szám, mely méri a két pont távolságát. Jele: d (A, B).
(d: distantia = távolság)

A távolság mérőszámától elvárjuk az alábbiakat:

1. Az egymásra illeszkedő pontok távolsága legyen nulla, azaz ha A = B, akkor d (A, B)=0.
2. Elvárjuk, hogy az AB távolsága egyezzen meg a BA távolságával: d (A, B)=d (B, A).
3. Három pont esetén kettő-kettő távolságára teljesüljön az un. háromszög egyenlőtlenség: $d(A,B) + d(B,C) \geq d(A,C)$.

Az egyenlőség abban az esetben áll fenn, ha a három pont egy egyenesre illeszkedik.

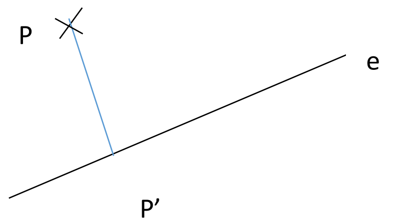




TÉRELEMEK TÁVOLSÁGA

Pont és egyenes:

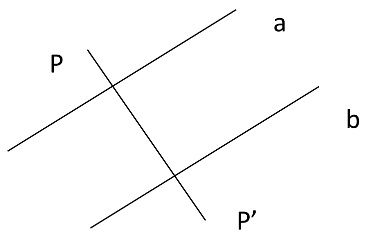
Pontnak az egyenestől való távolságán annak a szakasznak a hosszát értjük, amely a pontból az egyenesre bocsátott merőlegesen a pont és az egyenes között van.



$$d(P,e) = d(P,P')$$

Két párhuzamos egyenes:

Két párhuzamos egyenes távolsága annak a szakasznak a hossza, amely az egyik egyenes valamely pontjából a másik egyenesre bocsátott merőlegesen a két egyenes között van.

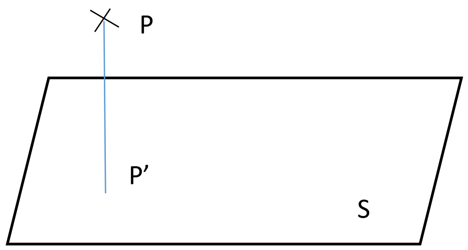


$$d(a,b) = d(P,P')$$

Def: Egy P pontból az S síkra bocsátott merőleges egyenesnek a síkon lévő P' pontját (talppontját) a P pontnak az S síkon lévő merőleges vetületének nevezzük.

Pont és sík távolsága:

A pontnak és a pontnak a síkon lévő merőleges vetületének a hossza a keresett távolság.



$$d(P,S) = d(P,P')$$

Egy sík, és a síkkal párhuzamos egyenes távolsága:

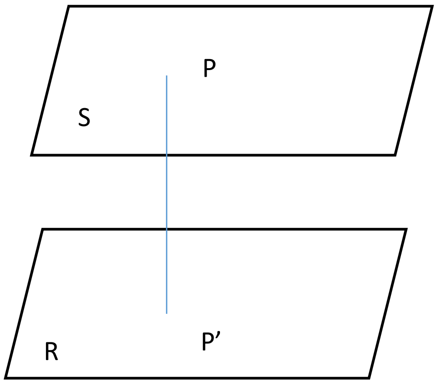
Ez a távolság megegyezik az egyenes egyik pontjának a síktól való távolságával.

$$d(e, S) = d(P, P')$$

Kétpárhuzamos sík távolsága:

Ez a távolság megegyezik valamelyik sík egy tetszőleges pontjának a másik síktól mért távolságával.

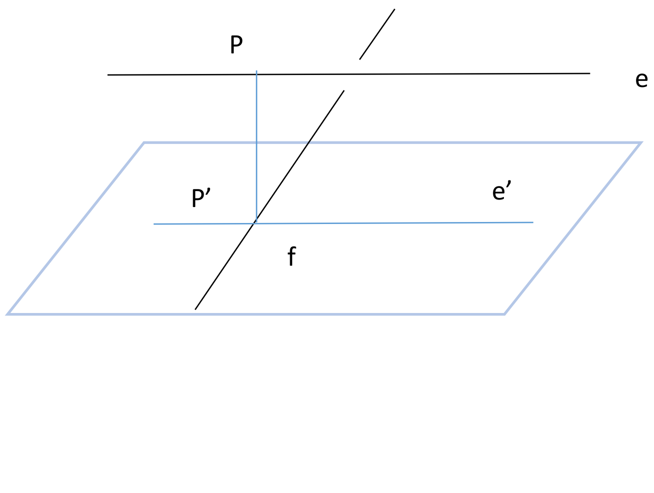
$$d(S, R) = d(P, P')$$



Két kitérő egyenes távolsága:

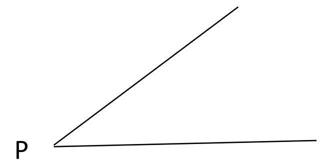
Két kitérő egyenes távolsága annak a szakasznak a hossza, amely a két kitérő egyenes mindegyikét metsző, és mindkét egyenesre merőleges egyenesen a két kitérő egyenes között van.

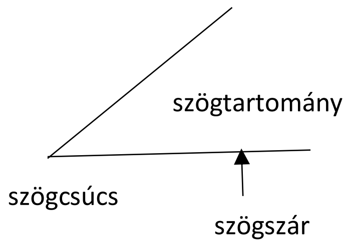
$$d(e, f) = d(P, P')$$



SZÖGEK

Egy pontbók kiinduló két félegyenes a rájuk illeszkedő síkot két részre bontja. Ezeket a részeket szögeknek nevezzük. A két félegyenes két szöget hoz létre. Amelyikkel dolgozunk, azt körívvel jelöljük.

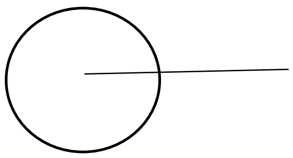




A szögeket a görög „abc” kisbetűivel jelöljük.

<u>Szögek mérése:</u> A szögeket fokokban és radiánokban mérhetjük.

A <u>teljesszög</u> az a szög, amelynél a két félegyenes egybeesik, és a szögtartomány a teljes sík.

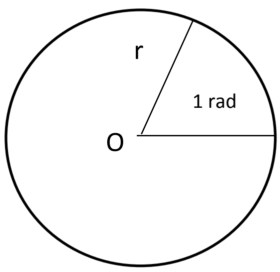


1° a teljesszög 360-ad része.

Radián – ívmérték: egysége az a szög, amelyhez mint középponti szöghöz a kör sugarával egyenlő hosszúságú körív tartozik.

$1\,rad \approx 57°\,17$ $\qquad 1° = \frac{\pi}{180}$ $\qquad 1° = 60'$

$\pi\,rad = 180°$ $\qquad 1' = 60''$



$i = r$

A szögek csoportosítása:

Nullszög: a két félegyenes egybeesik.

Hegyesszög: $0° < \alpha < 90°$

Derékszög: $\alpha = 90°$

Tompaszög: $90° < \alpha < 180°$

Egyenesszög: $\alpha = 180°$

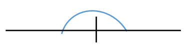
Konvex (domború) szögek

Homorúszög: $180° < \alpha < 360°$

Teljesszög: $\alpha = 360°$

Konkáv (homorú) szögek

Egyenesszög: az a szög, melynek szárai egy egyenest alkotnak:

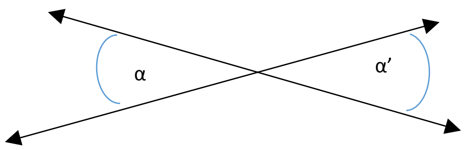


Nevezetes szögpárok

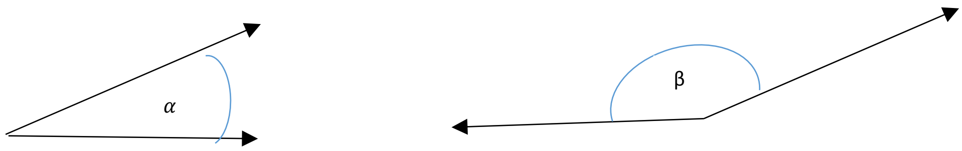
- Ha két konvex, vagy két konkáv szög szárai párhuzamosak és páronként egyenlő irányúak, akkor azokat egyállású szögeknek nevezzük. Az egyállású szögek egyenlők.

- Ha két konvex, vagy két konkáv szög szárai párhuzamosak, és páronként ellentétes irányúak, akkor azokat váltószögeknek nevezzük. A váltószögek egyenlők.

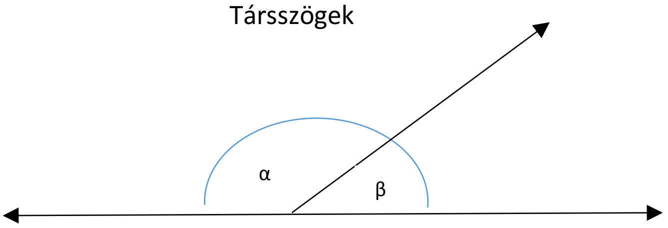
- Ha a váltószögek szárai egybeesnek, akkor azokat csúcsszögeknek nevezzük.



- Társszögeknek nevezünk két konvex szöget, ha száraik párhuzamosak, egy-egy száruk iránya megegyezik, egy-egy száruk iránya pedig ellentétes. Ha az azonos irányú szögszár közös, akkor mellékszögeknek nevezzük a szögeket. A társszögek 180°-ra egészítik ki egymást, ezért kiegészítő szögek.

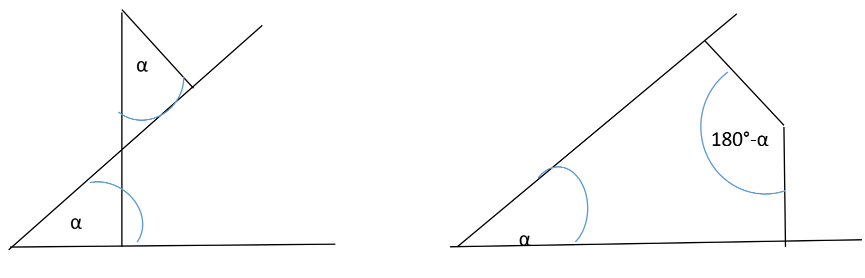


Társszögek



Mellékszögek

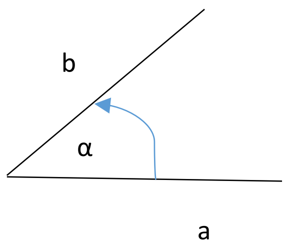
- A merőleges szárú konvex szögek szárai páronként merőlegesek egymásra. Ezek a szögpárok vagy egyenlők, vagy pedig 180°-ra egészítik ki egymást.



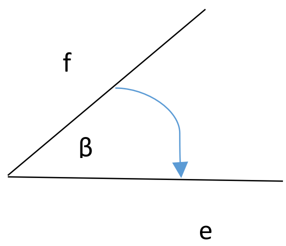
Forgásszögek

Egy szög két szárát megkülönböztethetjük: ha az egyik szárat kiinduló szárnak tekintjük, és abból kiindulva a másik szárat a közös végpont körül forgatjuk, az így kapott szöget forgásszögnek nevezzük. A forgásszög irányított, így nagyságával és irányával adjuk meg.

Ha a síkra tekintünk, és a szög kiinduló szárát a másik szárba az óramutató járásával ellentétes forgatással vihetjük át, akkor a szöget pozitívnak, ellenkező esetben a szöget negatívnak nevezzük.



$(a, b)\measuredangle = +\alpha$

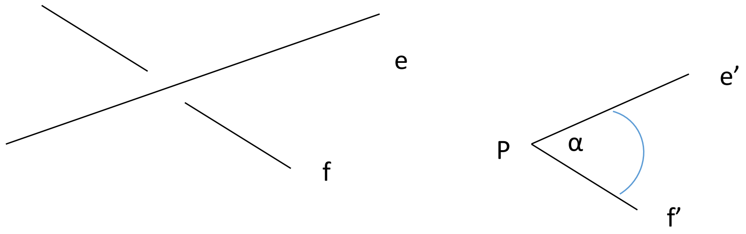


$(e, f)\measuredangle = -\beta$

A forgásszög 360°-nál nagyobb is lehet.

Térelemek hajlásszöge

Def: Két kitérő egyenes hajlásszögének nevezzük a tér egy tetszőleges pontján átmenő, velük párhuzamos egyenesek hajlásszögét.



$e \,||\, e', f \,||\, f'$

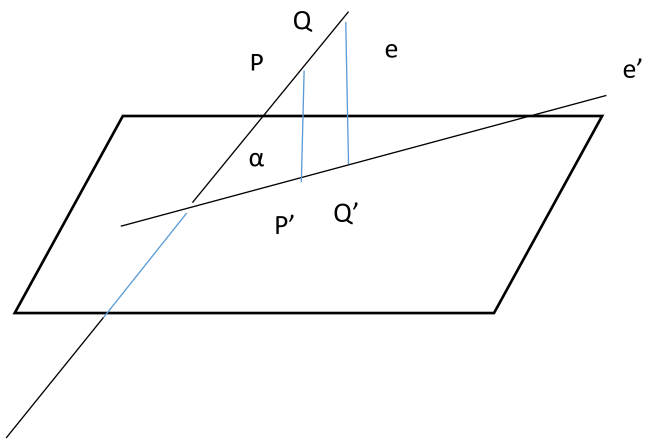
Def: Egy egyenes és egy sík akkor merőleges egymásra, ha az egyenes merőleges a sík minden egyenesére.

Tétel: Ha egy egyenes merőleges a sík két egymást metsző egyenesére, akkor a sík minden egyenesére, azaz a síkra is merőleges.

Ha egy egyenes nem merőleges az S síkra, akkor két pontjának merőleges vetületére illeszkedő e' egyenest az e egyenesnek az S síkon lévő merőleges vetületének nevezzük.

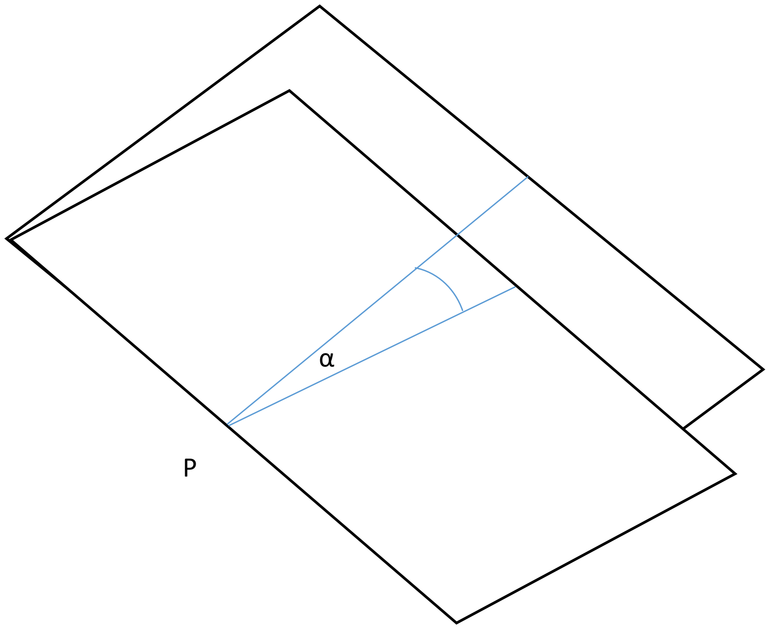
Def: Ha egy egyenes nem merőleges a síkra, akkor az egyenes és sík hajlásszöge az a szög, amelyet az egyenes a síkon lévő merőleges vetületével bezár.

Egy síknak, és a vele párhuzamos egyenesnek a hajlásszöge 0°.



Def: Két metsző sík hajlásszögének meghatározásához legyen P a két sík metszésvonalának egy tetszőleges pontja. P-ben a két sík mindegyikén egy-egy merőlegest állítunk a metszésvonalra. A két sík hajlásszöge megegyezik ennek a két egyenesnek a hajlásszögével.

Ha a két sík párhuzamos, akkor a hajlásszögük 0°.



Tétel: Ha a tér egy pontjából merőlegest bocsátunk egy síkra és annak egy e egyenesére, akkor a két talppontra illeszkedő egyenes is merőleges az e egyenesre.

A TERÜLET FOGALMA

Minden síkbeli alakzathoz hozzárendelhetünk egy pozitív számot, amelyet az alakzat területének nevezünk. Az említett hozzárendelés egyértelműen elvégezhető úgy, hogy teljesüljön az alábbi két feltétel:

- az egybevágó alakzatok területe egyenlő
- ha egy alakzat véges sok (közös belső pont nélküli) alakzat egyesítéséből áll, akkor területe egyenlő az őt alkotó alakzatok területének összegével.

Az egységnyi oldalhosszúságú négyzet területe az 1 területegység.

Def: A terület a síkidom kiterjedését, nagyságát jellemző pozitív valós szám, amely azt adja meg, hogy a keresett terület hányszorosa az egységnek választott síkidom (egységnégyzet) területének.

Ez a definíció csak az egyenes vonalakkal határolt síkidomok esetében alkalmazható közvetlenül.

A TÉRFOGAT FOGALMA

Minden poliéderhez hozzárendelhetünk egy pozitív számot, amelyet a poliéder tétfogatának nevezünk. Az említett hozzárendelés egyértelműen elvégezhető úgy, hogy teljesüljön az alábbi két feltétel:

- az egybevágó poliéderek térfogata egyenlő
- ha egy poliéder véges sok (közös belső pont nélküli) poliéder egyesítéséből áll, akkor térfogata egyenlő az őt alkotó poliéderek térfogatának összegével.

Az egységnyi élhosszúságú kocka térfogata 1 térfogategység.

Def: A térfogat a térbeli alakzatok, testek kiterjedését, (űrtartalmát) jellemző pozitív valós szám, amely azt adja meg, hogy a keresett térfogat hányszorosa az egységnek választott test (kocka) térfogatának.

Ez a definíció csak a síklapokkal határolt testek esetében alkalmazható közvetlenül.

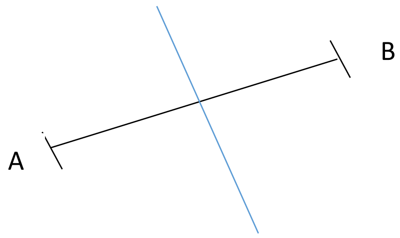
<u>Ponthalmazok</u>

Az azonos tulajdonságú pontok alkotnak ponthalmazokat. A ponthalmazokkal a geometria foglalkozik.

<u>Tétel:</u> Egy <u>szakasz felezőmerőlegese</u> azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek a szakasz két végpontjától egyenlő távolságra vannak.

A síkban: a szakaszt felező, és a szakaszra merőleges egyenes.

A térben: a szakaszt felező, és a szakaszra merőleges sík.

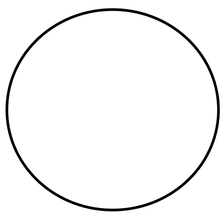


<u>Def:</u> A <u>körvonal</u> olyan pontok halmaza a síkban, melyek az S sík egy megadott O pontjától megadott r távolságra vannak.

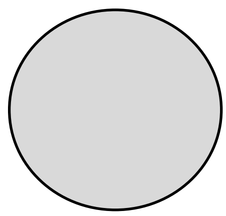
$$k_{körvonal} = \{P|\ \overline{OP} = r;\ O\epsilon S,\ \ P\epsilon S\ \ r\epsilon \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{R}^{-}\}$$

<u>Def:</u> A <u>körlap</u> az S sík egy adott O pontjától megadott r távolságnál nem nagyobb távolságra lévő síkbeli pontok halmaza.

$$k_{körlap} = \{P|\ \overline{OP} \leq r;\ O\epsilon S,\ \ P\epsilon S\ \ r\epsilon \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{R}^{-}\}$$

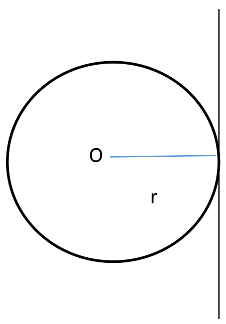


körvonal



körlap

<u>Def:</u> A kör <u>érintő</u>je olyan egyenes, amely a körrel közös síkban van, és a körrel pontosan egy közös pontja van.



Def: A gömbfelület olyan pontok halmaza a térben, melyek egy megadott O ponttól megadott r távolságra vannak.

$$G_{gömbfelület} = \{P \mid \overline{OP} = r;\ r\epsilon \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{R}^{-}\}$$

Def: A gömbtest egy adott O ponttól megadott r távolságnál nem nagyobb távolságra lévő síkbeli pontok halmaza.

$$G_{gömbtest} = \{P \mid \overline{OP} \leq r;\ r\epsilon \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{R}^{-}\}$$

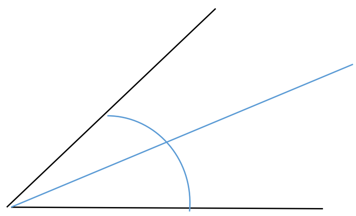
Def: A gömb érintő egyenese olyan egyenes, amelynek a gömbfelülettel pontosan egy közös pontja van.

Def: A gömb érintősíkja olyan sík, amelynek a gömbfelülettel pontosan egy közös pontja van.

Tétel: A gömb érintő egyenese merőleges az érintési ponthoz húzott gömbsugárra.

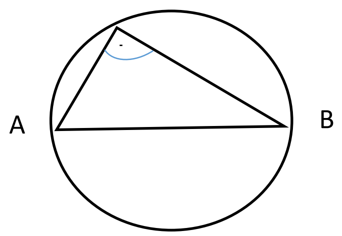
Tétel: A gömb érintősíkja merőleges az érintési ponthoz húzott gömbsugárra.

Tétel: Egy konvex szöget felező félegyenes azoknak a szögtartománybeli pontoknak a halmaza a síkban, melyek egyenlő távolságra vannak a szög két szárától.

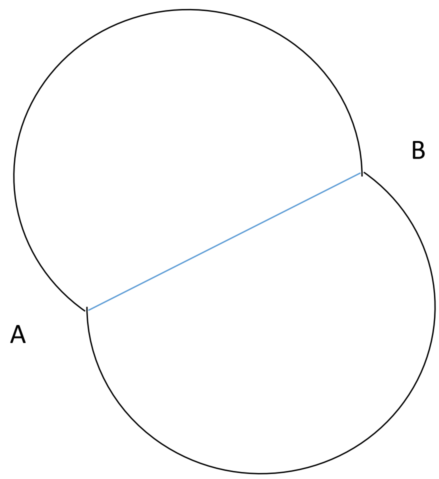


Tétel: A síkon azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekből egy AB szakasz derékszögben látszik, az AB átmérőjű kör, kivéve a szakasz két végpontját.

(Ez a Thalesz-tétel és a megfordítása.)



Tétel: A síkon azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekből egy adott szakasz adott α szögben látszik, két szimmetrikus körív. ($0° < \alpha < 180°$) Az adott szakasz a két szimmetrikus körív közös húrja. Az A és B pontok nem tartoznak a látószögkörívhez.



A körrel kapcsolatos ismeretek

<u>Def:</u> A <u>körvonal</u> olyan pontok halmaza a síkban, melyek az S sík egy megadott O pontjától megadott r távolságra vannak.

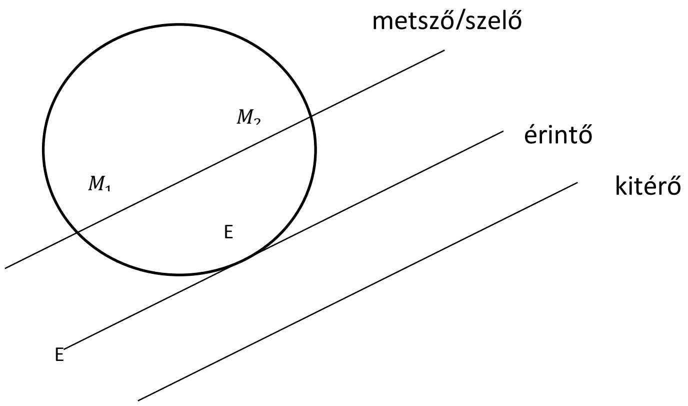
A megadott r távolság a kör sugara.

$$k_{körvonal} = \{P|\ \overline{OP} = r;\ O\epsilon S,\ \ P\epsilon S\ \ \ r\epsilon \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{R}^{-}\}$$

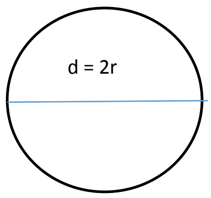
A kör kerülete: $K = 2r\pi.$ A kör területe: $T = r^2\pi.$

<u>A kör és egyenes kölcsönös helyzete:</u>

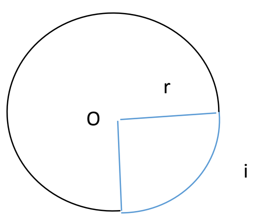
- lehet <u>metsző</u>, ekkor két közös pontjuk van,
- lehet <u>érintő</u>, ekkor egy közös pontjuk van
- lehet <u>kitérő</u>, ekkor nincs közös pontjuk.



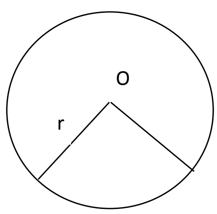
A kör <u>húrja</u> a körvonal két tetszőleges pontját összekötő szakasz. A legnagyobb húr az <u>átmérő</u>, mely átmegy a kör középpontján és hossza a sugár kétszerese: $d = 2r$.



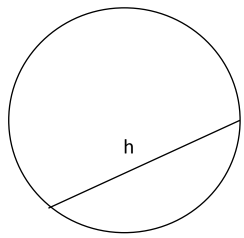
A körvonalat két pontja két <u>körívre</u> bontja. A körlemezt két sugár két <u>körcikk</u>re, egy húr pedig két <u>körszelet</u>re darabolja.



körív



körcikk



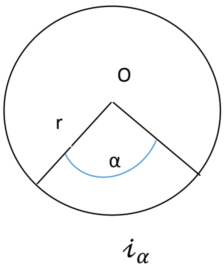
körszelet

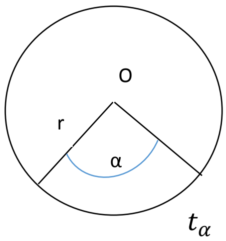
<u>Def:</u> A körben a <u>középponti szög</u> csúcsa a kör középpontja, a két szára pedig a kör két sugara.

A középponti szög szárai között egy-egy körív van: az α szöghöz i_α körív tartozik.

<u>Tétel:</u> Egy körben a középponti szögek nagyságai és a hozzájuk tartozó körívek hosszai egyenesen arányosak.

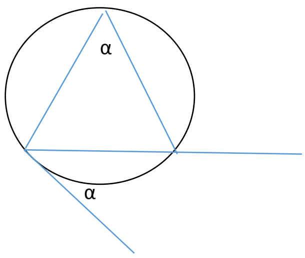
<u>Tétel:</u> Egy körben a középponti szögek nagyságai és a hozzájuk tartozó körcikkek területei egyenesen arányosak.





$$i_\alpha = \frac{2r\pi}{360°} \cdot \alpha = \frac{r\pi}{180°} \cdot \alpha \qquad\qquad t_\propto = \frac{r^2\pi}{180°} \cdot \alpha$$

<u>Def:</u> A kör <u>kerületi szög</u>ének nevezzük mindazokat a konvex szögeket, amelyeknek a csúcsa a kör kerületén van, és két száruk vagy egy-egy húrt tartalmaz, vagy pedig egyik száruk húrt tartalmaz, a másik pedig egy érintőre illeszkedik.

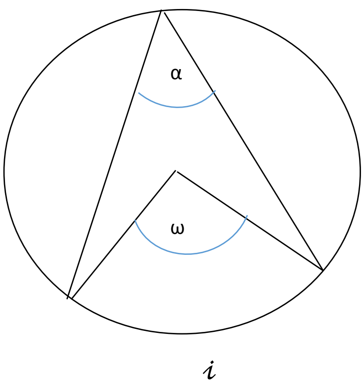


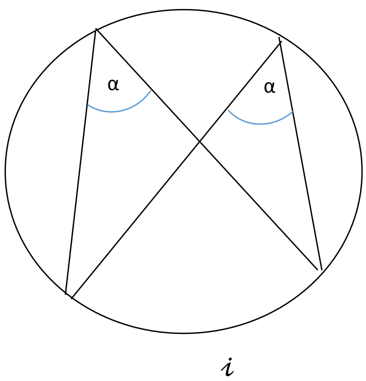
<u>A kerületi es középponti szögek tétele:</u>

<u>Tétel:</u> Egy körben az azonos ívekhez tartozó középponti és kerületi szögek aránya: 2:1, azaz ω = 2α.

<u>Kerületi szögek tétele:</u>

<u>Tétel:</u> Egy körben az ugyanahhoz az ívhez tartozó kerületi szögek egyenlők.

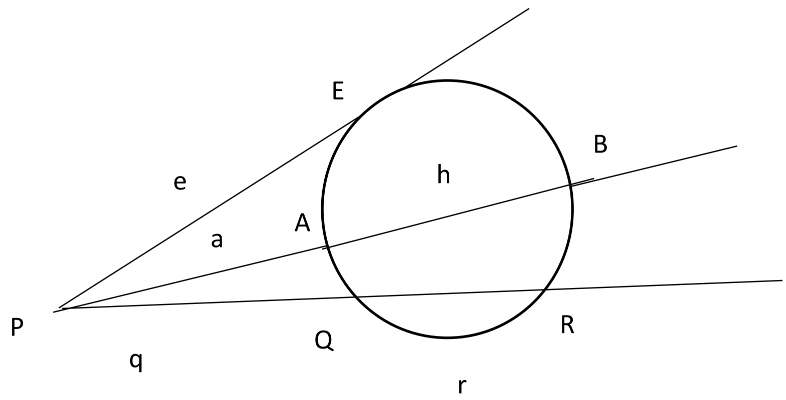




Körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele:

Tétel: A körhöz egy külső pontból húzott érintőszakaszok mértani közepe annak a két szakasznak, amelyek a külső pontra illeszkedő bármely szelőn a ponttól a körrel alkotott metszéspontokig terjednek.

Tétel: Ha egy körhöz egy külső pontból tetszőleges szelőket húzunk, akkor az egyes szelőkön a P ponttól a körrel alkotott metszéspontokig terjedő szakaszok szorzata állandó.



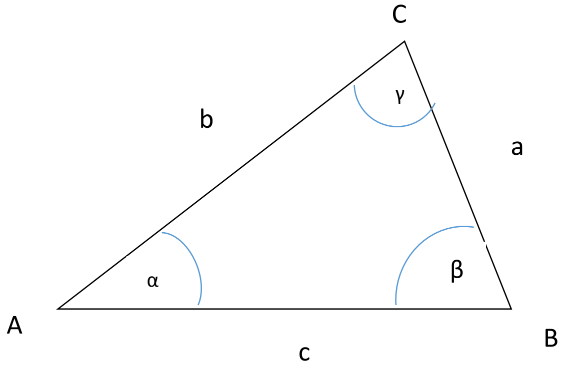
1. $PE = \sqrt{PA \cdot PB}$
2. $PA \cdot PB = PQ \cdot PR$

1. $e = \sqrt{a \cdot (a + h)}$
2. $a \cdot (a + h) = q \cdot (q + r)$

Háromszögek

Egy háromszöget három független adat egyértelműen meghatároz.

A háromszög alapjelölése:



A háromszögek megadásának alapesetei:

1. adott a háromszög három oldala
2. adott a háromszög két oldala és az általuk bezárt szög
3. adott a háromszög két oldala, és a hosszabb oldallal szemközti szög
4. adott a háromszög egy oldala és a rajta fekvő két szög.

Összefüggések a háromszög oldalai között:

A háromszög bármely két oldalának összege legyen nagyobb a harmadik oldalnál:

$$a + b > c; \quad b + c > a; \quad a + c > b.$$

A háromszög bármely oldala nagyobb, mint a másik két oldal különbségének abszolút értéke:

$$c > |a - b|; \quad a > |b - c|; \quad b > |a - c|.$$

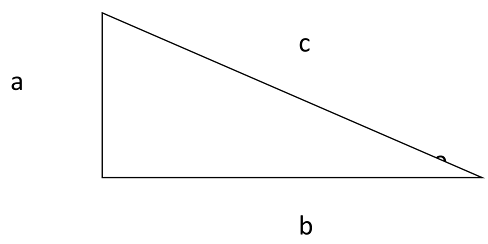
Összefüggés a derékszögű háromszög oldalai között:

PITAGORASZ-TÉTEL:

Tétel: Bármely derékszögű háromszögben a két befogó négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével.

A tétel megfordítása:

Tétel: Ha egy háromszög két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Összefüggések a háromszög szögei között:

Tétel: A háromszög belső szögeinek összege 180°.

Def: A háromszög belső szögeinek mellékszögeit a háromszög külső szögeinek nevezzük.

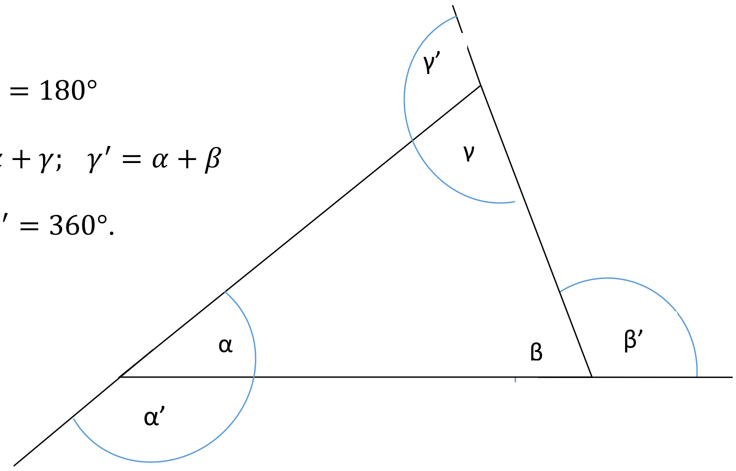
Tétel: A háromszög bármely külső szöge egyenlő a nem mellette lévő belső szögek összegével.

Tétel: A háromszög külső szögeinek összege 360°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180°$$

$$\alpha'=\beta+\gamma;\quad \beta'=\alpha+\gamma;\quad \gamma'=\alpha+\beta$$

$$\alpha'+\beta'+\gamma'=360°.$$



Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között:

Tétel: Ha egy háromszögnek van két egyenlő oldala, akkor a velük szemközti szögek is egyenlőek.

Tétel: Ha egy háromszög két szöge egyenlő, akkor a velük szemközti oldalak is egyenlő hosszúak.

1. $Ha\ a=b, \rightarrow \alpha=\beta$
2. $Ha\ \alpha=\beta, \rightarrow a=b$

$$a=b \leftrightarrow \alpha=\beta$$

Tétel: Bármely háromszögben két oldal közül a hosszabb oldallal szemközt nagyobb szög van, (a rövidebb oldallal szemben kisebb szög van).

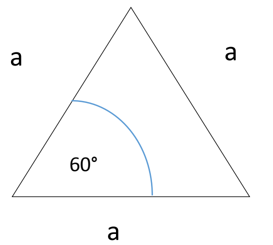
Tétel: Bármely háromszögben két szög közül a nagyobb szöggel szemközt hosszabb oldal van, (a kisebb szöggel szemben rövidebb oldal van).

1. $Ha\ a<b, \rightarrow \alpha<\beta$
2. $Ha\ \alpha<\beta, \rightarrow a<b$

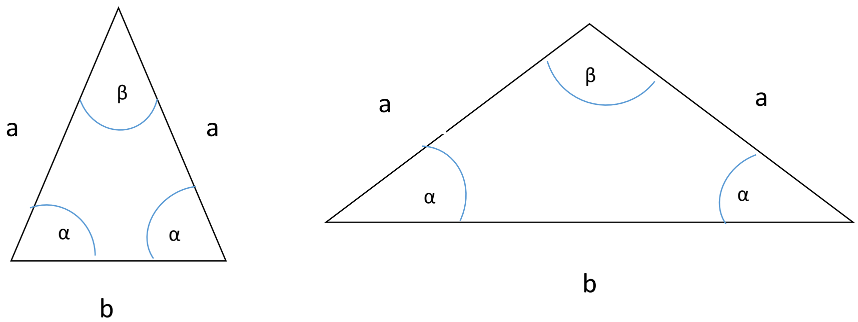
$$a<b \leftrightarrow \alpha<\beta$$

A háromszögek csoportosítása

- Szabályos, vagy egyenlő oldalú háromszög: minden szöge 60°.

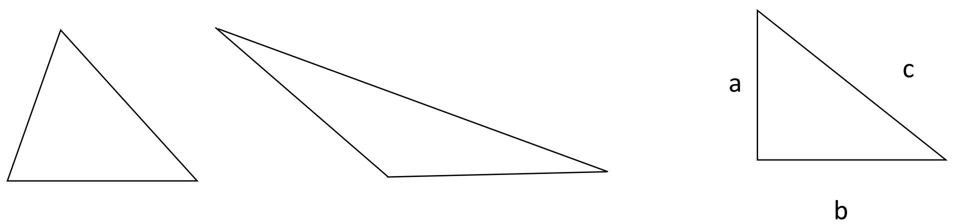


- Egyenlő szárú háromszög: van két egyenlő hosszúságú oldala és van két egyenlő szöge. A háromszög lehet hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű.



b:alap; a: szárak; α: alapon fekvő szögek; β: szárszög

- Hegyesszögű háromszög: minden szöge hegyesszög
- Tompaszögű háromszög: egy tompaszöge van, a másik kettő hegyesszög.
- Derékszögű háromszög: egy derékszöge van, a másik kettő hegyesszög.



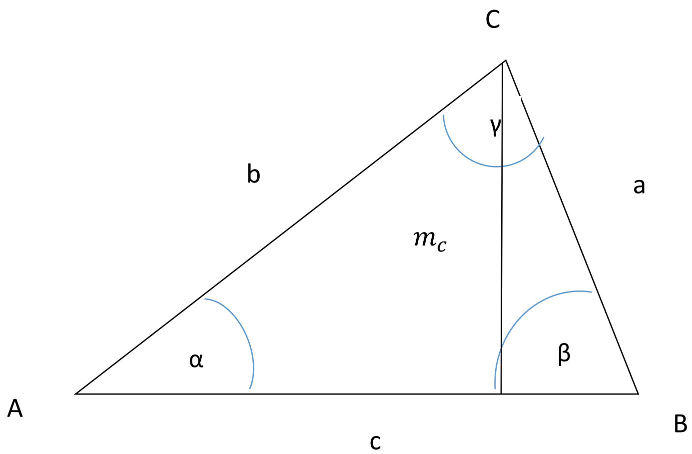
hegyesszögű háromszög

tompaszögű háromszög

derékszögű háromszög
a,b a két befogó,
c az átfogó

A háromszög területének meghatározása

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$$



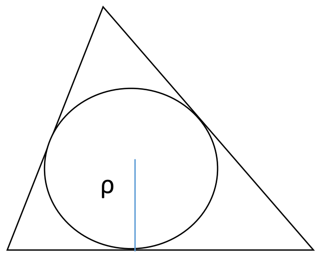
Héron-képlet:

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ahol $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{k}{2}$, azaz s a félkerület.

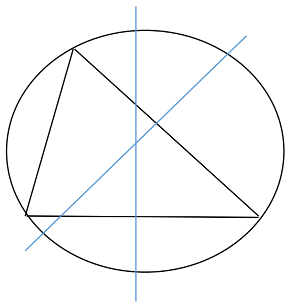
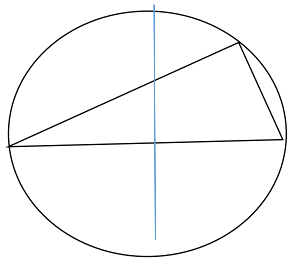
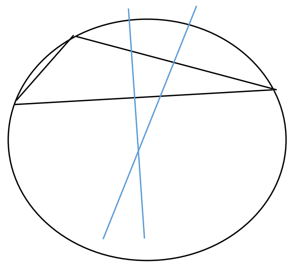
$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2}$$

$T = \rho \cdot \frac{k}{2} = \rho \cdot s$, ahol ρ a háromszögbe írható kör sugara.

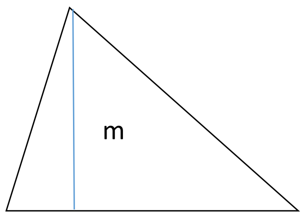


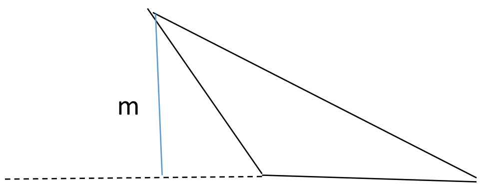
A háromszögek nevezetes vonalai és körei

1. Oldalfelező merőleges: a háromszög oldalszakaszainak felezőmerőlegesei.
   Tétel: A háromszög három oldalának felezőmerőlegese egy pontban metszi egymást.
   Ez a pont a háromszög köré írható kör középpontja.
   Hegyesszögű háromszög esetén ez a pont a háromszögön belül van, tompaszögű háromszög esetén pedig a háromszögön kívül található. Derékszügű háromszög esetén a kör középpontja az átfogó felezőpontja.

2. Magasságvonal: A háromszög magasságvonalának a csúcsból a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőlegest nevezzük. Ennek azt a szakaszát, amelyik a háromszög csúcsa és a szemközti oldal egyenese között van, a háromszög magasságának nevezzük.
   Tompaszögű háromszög esetén ez a szakasz a háromszögön kívül is haladhat.
   Egy háromszögnek három magasságvonala van.

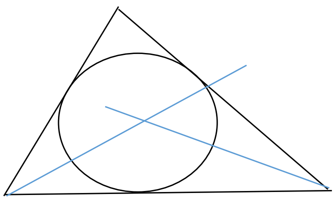




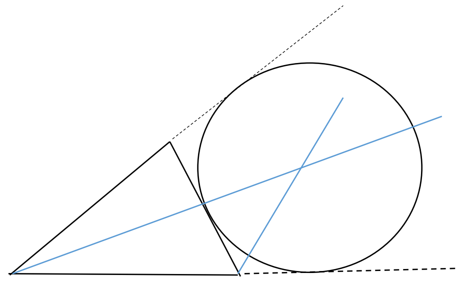
   Tétel: A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást.
   Ezt a pontot szokták magasságpontnak is nevezni. Hegyesszögű háromszög esetén a magasságpont a háromszögön belül van, tompaszögű háromszögnél pedig a háromszögön kívül. Derékszögű háromszög esetén ez a pont a derékszögű csúcspont.

3. Belső és külső szögfelezők: A háromszög belső szögeinek szögfelező félegyeneseit a háromszög szögfelezőinek nevezzük. A külső szögek szögfelezőit külső szögfelezőknek mondjuk. Minden háromszögnek három szögfelezője és három külső szögfelezője van. Az egymás melletti belső éskülső szögfelezők merőlegesek egymásra.

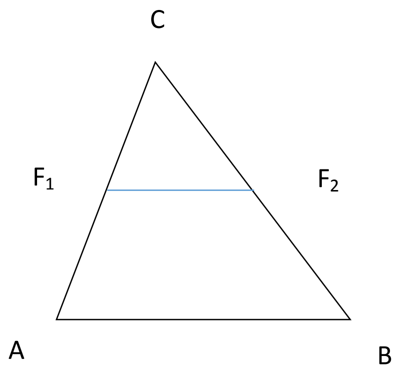
   Tétel: A háromszög három szögfelezője egy pontban metszi egymást.
   Ez a pont a háromszögbe beírt kör középpontja.



Tétel: A háromszög egy belső és a nem mellette lévő két külső szögének szögfelezöi is egy pontban metszik egymást.
Ez a pont a háromszög hozzáírt körének középpontja.



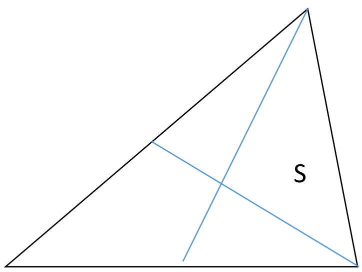
4. Középvonal: A háromszög két oldalának felezőpontját összekötő szakaszt a háromszög középvonalának nevezzük. A háromszögnek három középvonala van.
   Tétel: A háromszög bármely középvonala párhuzamos a háromszög harmadik oldalával és hossza fele a harmadik oldal hosszának.



$AB \parallel F_1F_2$

$\frac{AB}{2} = F_1F_2$

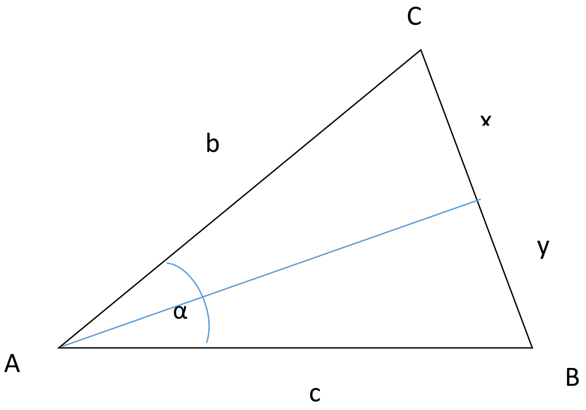
5. Súlyvonal: A háromszög egyik csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz a háromszög súlyvonala. A háromszögnek három súlyvonala van.
   Tétel: A háromszög súlyvonalai egy pontban, a súlypontban metszik egymást. A súlypont a súlyvonalat 2 : 1 arányban osztja két részre. (A hosszabb szakasz van a csúcs felé.)



A háromszögekkel kapcsolatos további tételek

Szögfelező tétel:

Tétel: Bármely háromszögben egy belső szög szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja két részre.



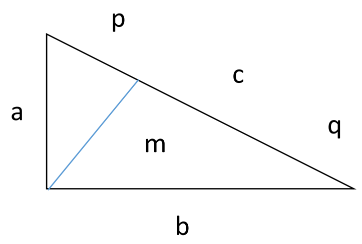
$$x : y = b : c$$

Magasságtétel:

Tétel: Bármely derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság mértani közepe az átfogó két szeletének.

Befogótétel:

Tétel: Bármely derékszögű háromszögben az egyik befogó mértani közepe az átfogón lévő merőleges vetületének és az átfogónak.



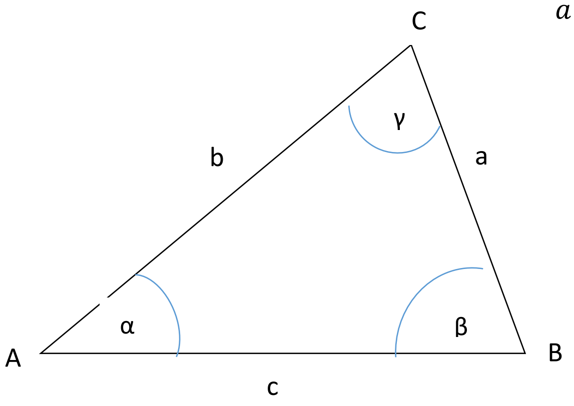
1. $m^2 = p \cdot q \rightarrow m = \sqrt{p \cdot q}$
2. $a^2 = p \cdot c \rightarrow a = \sqrt{p \cdot c}$

   $b^2 = q \cdot c \rightarrow b = \sqrt{q \cdot c}$

Szinusztétel:

Tétel: Bármely háromszögben két oldal aránya megegyezik a szemközti szögek szinuszainak arányával.

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$



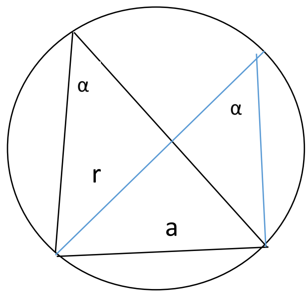
Koszinusztétel:

Tétel: Bármely háromszögben az egyik oldal négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldal négyzetének összegéből kivonjuk a két oldal és a közbezárt szög koszinuszának kétszeres szorzatát.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

Összefüggés aháromszög egyik oldala, szemközti szöge és a köré írt körének sugara között:

$\sin\alpha = \frac{a}{2r}$, $\sin\beta = \frac{b}{2r}$, $\sin\gamma = \frac{c}{2r}$.



Hegyesszögek szögfüggvényei derékszögű háromszögben

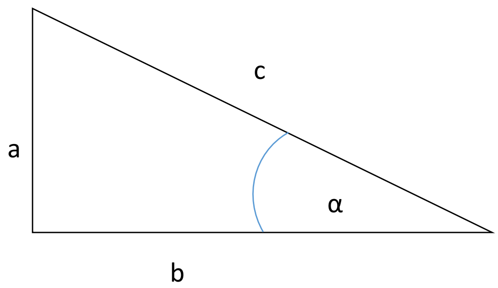
A hasonló derékszögű háromszögek oldalainak arányával való számolás annyira fontos, hogy az egyes arányok önálló elnevezést kaptak.

Def: A derékszögű háromszögben az α szög szinuszának nevezzük az α hegyesszöggel szemközti befogónak és az átfogónak az arányát.

Def: A derékszögű háromszögben az α szög koszinuszának nevezzük az α hegyesszög melletti befogónak és az átfogónak az arányát.

Def: A derékszögű háromszögben az α hegyesszög tangensének nevezzük az α hegyesszöggel szemközti befogónak és az α hegyesszög melletti befogónak az arányát.

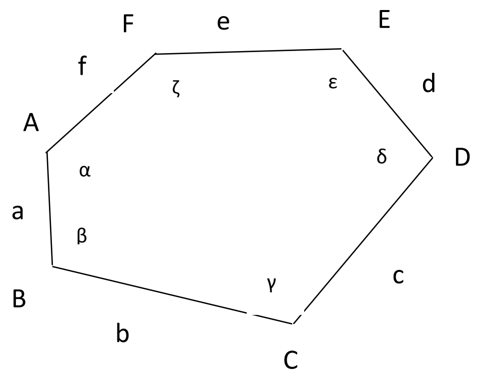
Def: A derékszögű háromszögben az α hegyesszög kotangensének nevezzük az α hegyesszög melletti befogónak és az α hegyesszöggel szemközti befogónak az arányát.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$
$$\sec\alpha = \frac{c}{b}$$
$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}$$

Sokszögek

A sokszöget zárt töröttvonal határolja. Az egymáshoz csatlakozó szakaszokat oldalaknak, a csatlakozási pontokat csúcsoknak nevezzük. A síkbeli egyszerű sokszögvonal két síkidomra vágja a síkot, ezek közül a korlátosat nevezzük sokszöglapnak, egyszerűbben sokszögnek.

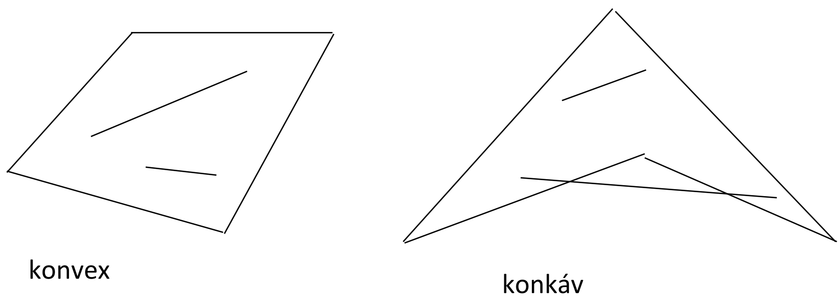


Az n oldalú sokszögnek n csúcsa és n oldala van.

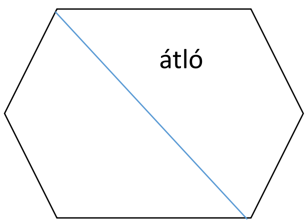
Def: A sokszög kerülete a sökszöget határoló töröttvonal hossza.

Def: Azokat a sökszögeket, (alakzatokat) nevezzük konvexeknek, amelyek két pontjukkal együtt a két pontot összekötő szakasz minden pontját is tartalmazza.

Def: Azokat a sokszögeket, (alakzatokat) nevezzük konkávnak, amelyeknek van olyan pontpárja, amelyeket összekötő szakasz nem minden pontja van a sokszögön belül. Azaz azok az alakzatok konkávok, melyek nem konvexek.



Def: A két nem szomszádos csúcsot összekötő szakaszt átlónak nevezzük.



Tétel: Az n oldalú konvex sokszög bármely csúcsából $(n-3)$ darab átló húzható.

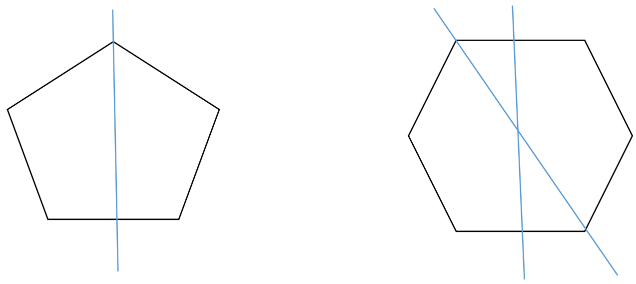
Tétel: Az n oldalú konvex sokszög átlóinak száma: $\frac{n(n-3)}{2}$.

Tétel: Az n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege: $n \cdot 180° - 360°, azaz\ (n-2) \cdot 180°$.

Szabályos sokszögek

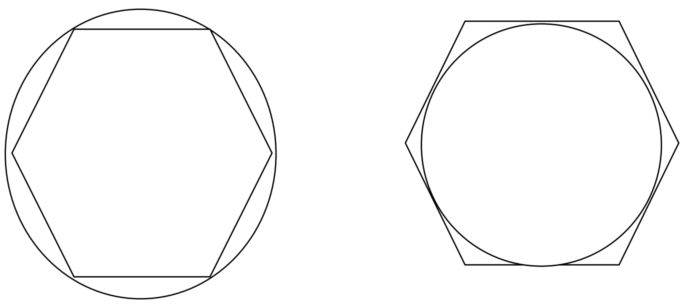
Szabályos sokszögeknek nevezzük azokat a sokszögeket, amelyeknek minden oldala egyenlő hosszúságú és minden szöge egyenlő nagyságú.
Minden szabályos sokszögnél találunk szimmetriát: minden szabályos sokszög tengelyesen szimmetrikus. Az n oldalú szabályos sokszögnek n darab szimmetriatengelye van.

- Ha n páros, azaz $n = 2k$ alakú, akkor a szimmetriatengelyek kétfélék: $\frac{n}{2}$ darab olyan szimmetriatengely van, mely a szemközti csúcsokra illeszkedő egyenes – ez felezi a csúcsoknál lévő szöget; $\frac{n}{2}$ darab szimmetriatengely pedig a szemközti oldalak felezőmerőlegesei.
- Ha n páratlan, azaz $n = 2k + 1$ alakú, akkor az összes n darab szimmetriatengely egy-egy oldal felezőmerőlegese, a másik metszéspontnál pedig a szemközti csúcsra illeszkedik.



Van olyan pont, amelyre minden szimmetriatengely illszkedik: ezt a pontot a szabályos sokszög középpontjának nevezzük.

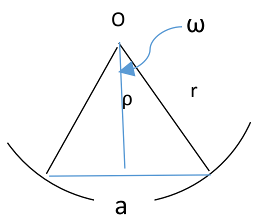
A szabályos sokszög középpontjából razrolhatunk egy olyan kört, amely átmegy a sokszög minden csúcsán. Ezt a kört a szabályos sokszög köré írt körnek nevezzük. Az a kör, amelynek középpontja megegyezik a sokszög középpontjával és átmegy minden oldalának felezőpontján, a szabályos sokszög beírt körének nevezzük: ez a kör a szabályos sokszög minden oldalát érinti.



Minden szabályos sokszög forgásszimmetrikus. Ha az n oldalú szabályos sokszöget a középpontja körül $\frac{360°}{n}$ szöggel, vagy annak egész számú többszörösével, $\frac{360°}{n} \cdot k, (k\epsilon \boldsymbol{Z})$ szöggel elforgatjuk, akkor a képe önmaga.

Ha az n páros, akkor a 180°-os elforgatásra is forgásszimmetrikus, azaz középpontosan is szimmetrikus.

Ha az n oldalú szabályos sokszög középpontját összekötjük a sokszög csúcsaival, akkor n darab egybevágó, egyenlő szárú háromszöget kapunk.



A szabályos n-szög kerülete, területe:

$$K = n \cdot a$$

$$T = n \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \rho = n \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \sin \omega = \frac{1}{4} n \cdot a^2 ctg\, \frac{\omega}{2}$$

Négyszögek

A négyszögeknek négy oldaluk, négy csúcsuk van.

Def: A négyszögek <u>középvonala</u> a két szemközti oldal felezőpontját összekötő szakasz.

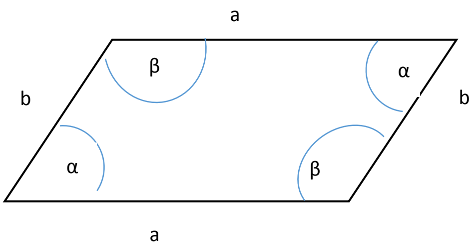
A négyszögnek két középvonala van.

PARALELOGRAMMA

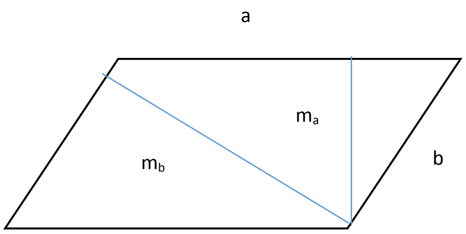
Def: Egy négyszög paralelogramma, ha két-két szemközti oldala párhuzamos.

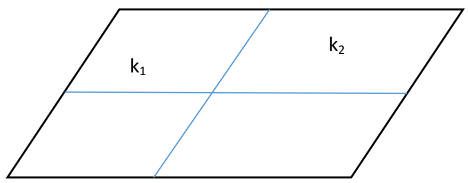
<u>Tulajdonságai:</u>

- szemközti oldalai egyenlők
- szemközti szögei egyenlők
- szomszédos szögeinek összege 180°
- az átlók metszéspontjára középpontosan szimmetrikus



A párhuzamos oldalak közötti merőleges szakaszt az ehhez az oldalhoz tartozó <u>magasságnak</u> nevezzük.





A paralelogramma <u>középvonala</u> párhuzamos a másik két oldalpárral es egyenlő hosszúságú azokkal.

$$K = 2a + 2b = 2(a + b)$$

$T = a \cdot m_a = b \cdot m_b = a \cdot b \cdot \sin\alpha = a \cdot b \cdot \sin\beta,$ mivel $\sin\beta = \sin\alpha,\ mert\ \alpha = 180° - \beta.$

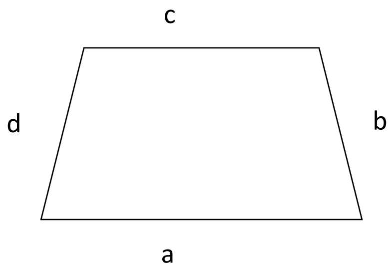
<u>Speciális paralelogrammák:</u>

- téglalap
- négyzet
- rombusz

TRAPÉZ

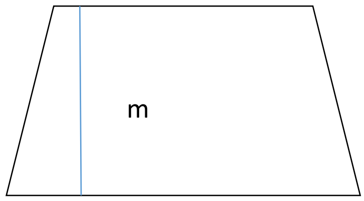
Def: Egy négyszög trapéz, ha van egy párhuzamos oldalpárja.

A párhuzamos oldalak a trapéz alapjai, a másik két oldal a trapéz szárai.



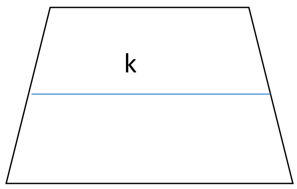
a, c: alapok

b, d: szárak



A trapéz magassága az alapok egymástól való távolsága.

A két szár felezőpontját összekötő szakasz a trapéz egyik középvonala, amely párhuzamos az alapokkal és azok számtan közepe: $k = \frac{a+c}{2}$

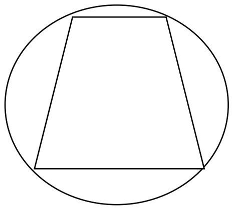


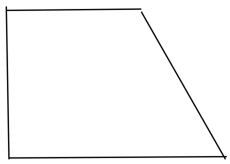
$K = a + b + c + d$

$T = \frac{a+c}{2} \cdot m = k \cdot m$

Speciális trapézok:

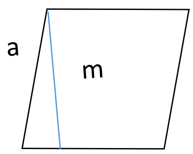
- Szimmetrikus trapéz: az alapon fekvő két szög egyenlő; kört lehet köré írni, így húrtrapéznak is nevezzük.
- Derékszögű trapéz: az egyik szár merőleges az alapra.

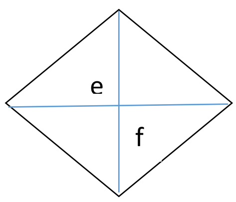




ROMBUSZ

Def: A rombusz olyan négyszög, amelynek minden oldala egyenlő hosszúságú.





Tulajdonságai:

- átlói merőlegesen felezik egymást;
- átlóira tengelyesen szimmetrikus;
- az átlók metszéspontjára középpontosan szimmetrikus.

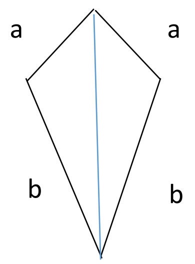
A párhuzamos oldalak közötti szakaszt az ehhez az oldalpárhoz tartozó magasságnak nevezzük. A rombusz oldalai páronként párhuzamosak, így rendelkezik a paralelogramma tulajdonságaival is.

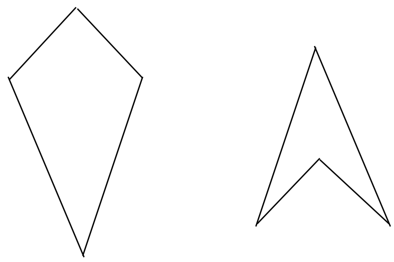
$K = 4a$

$$T = a \cdot m_a = \frac{e \cdot f}{2} = a^2 \cdot \sin\alpha$$

DELTOID

Def: Az olyan négyszöget, amelynek két-két szomszédos oldala egyenlő, deltoidnak nevezzük.





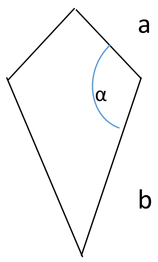
konvex konkáv

Az egyenlő oldalak metszéspontjánál keletkező csúcsokat összekötő átló a deltoid szimmetriatengelye, és ez az átló merőlegesen felezi a másik átlót.

Ha minden szöge kisebb, mint 180°, akkor konvex deltoidnak nevezzük, egyébként konkáv deltoidnak mondjuk.

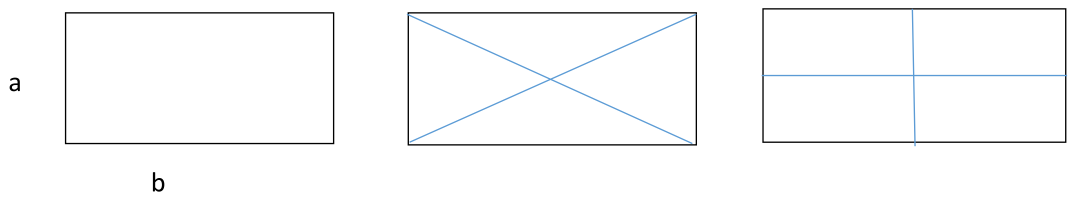
$K = 2a + 2b = 2(a + b)$

$$T = \frac{e \cdot f}{2} = a \cdot b \cdot \sin\alpha$$



Téglalap:

Def: A téglalap olyan négyszög, melynek minden szöge egyenlő, azaz minden szöge derékszög.



Tulajdonságai:

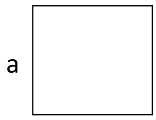
- a téglalap rendelkezik a paralelogramma tulajdonságaival;
- a téglalap átlói egyenlő hosszúságúak;
- az átlók metszéspontjára középpontosan szimmetrikus;
- a középvonalaira tengelyesen szimmetrikus

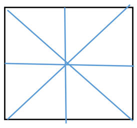
$K = 2a + 2b = 2(a + b)$

$T = a \cdot b$

Négyzet:

Def: A négyzet olyan négyszög, melynek minden oldala és minden szöge egyenlő.





$K = 4a$

$T = a^2$

Tulajdonságai:

- a négyzet átlói merőlegesen felezik egymást és egyenlő hosszúságúak;
- az átlók metszéspontjára a négyzet középpontosan szimmetrikus → ezt a pontot a négyzet középpontjának nevezzük;
- négy szimmetriatengelye van: a két átló és a két középvonal.

Húrnégyszögek

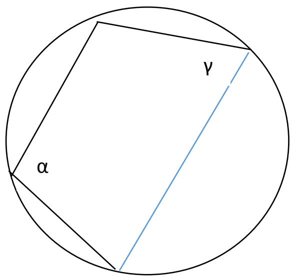
Def: A húrnégyszög olyan négyszög, melynek minden oldala ugyanannak a körnek egy – egy húrja.

Tétel: Bármely húrnégyszög két szemközti szögének az összege 180°.

Megfordítás: Ha egy négyszög szemközti szögeimek összege 180°, akkor az húrnégyszög.

Tétel: Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek összege 180°.

$$\alpha + \gamma = 180°.$$



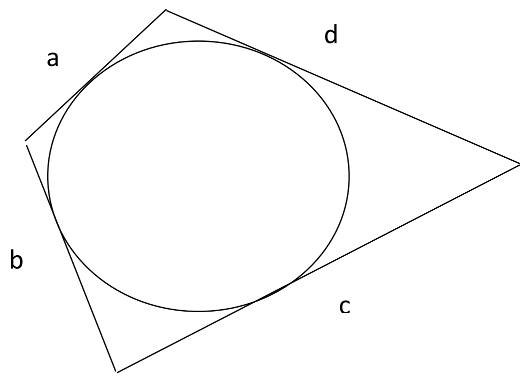
Érintőnégyszögek

Def: Egy érintőnégyszög olyan négyszög, amelynek minden oldala ugyanazon a kör egy – egy érintője.

Tétel: Bármely érintőnégyszögben a két – két szemközti oldal hosszúságának az összege egyenlő.

Megfordítás: Ha egy konvex négyszögben a két – két szemközti oldal hosszúságának az összege egyenlő, akkor a négyszög érintőnégyszög.

Tétel: Egy konvex négyszög akkor és csakis akkor érintőnégyszög, ha két – két szemközti oldalának az összege egyenlő.



$$a + c = b + d$$

Geometriai szerkesztések

Az egyélű vonalzóval és körzővel elvégeszhető szerkesztéseket Euklideszi szerkesztésnek mondjuk.

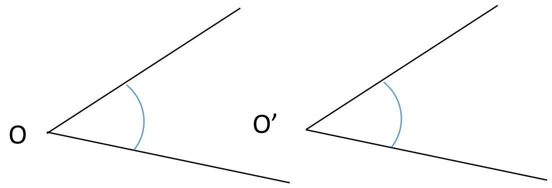
Az Eulideszi szerkesztés megengedett lépései:

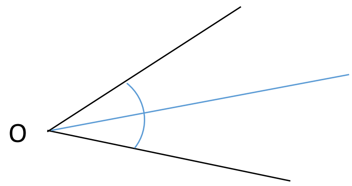
1. A vonalzót két adott ponthoz illesztve meghúzhatjuk a két pontra illeszkedő egyenest.
2. Két adott pont távolságát körzőnyílásba vehetjük.
3. Adott pont körül adott sugárral kört rajzolhatunk.
4. Két egyenes metszéspontját meghatározhatjuk.
5. Egyenes és kör metszéspontjait meghatározhatjuk.
6. Két kör metszéspontjait meghatározhatjuk.

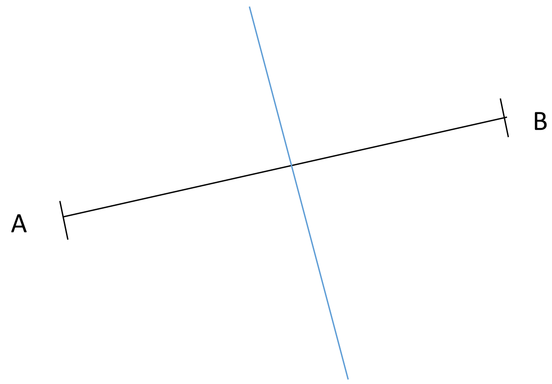
Párhuzamos és merőleges egyenesek derékszögű vonalzókkal is szerkeszthetők, de a derékszögű vonalzó alkalmazása már nem Euklideszi szerkesztés.

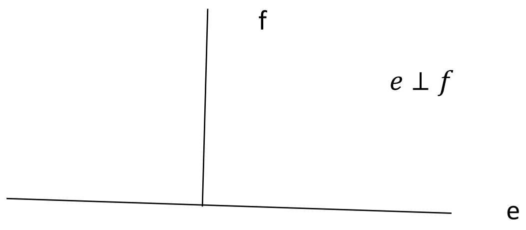
Alapszerkesztések:

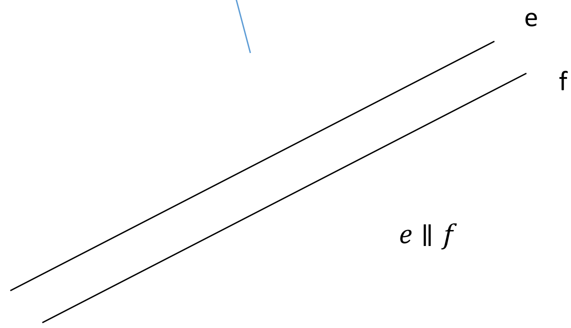
- szögmásolás,
- szögfelezés
- szakaszfelező merőleges szerkesztése
- merőleges egyenesek szerkesztése
- párhuzamos egyenesek szerkesztése.











A szerkesztések végén diszkussziót végzünk, ami a szerkesztés feltételeinek vizsgálatát jelenti.

GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

Def: A geometriai transzformáció olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete is ponthalmaz.

Két (vagy több) geometriai transzformációnak az egymás utáni elvégzését a két (vagy több) transzformáció szorzatának nevezzük.

Jele: g o f = g [f(P)]

Def: Egy geometriai transzformációnál az olyan pontot, amelynek a képe önmaga, fixpontnak nevezzük. Az olyan egyenest, amelynek a képe (pontonként is) önmaga, akkor fixegyenesnek nevezzük.
Ha egy alakzat képe önmaga, akkor invariáns alakzatnak mondjuk. Ha egy invariáns alakzat minden pontja fixpont, akkor azt fixalakzatnak nevezzük.

TÁVOLSÁGTARTÓ TRANSZFORMÁCIÓK

Def: Távolságtartó (egybevágósági) transzformációknak nevezzük azokat a transzformációkat, amelyeknél bármely szakasz képének a hossza megegyezik a szakasz hosszával.

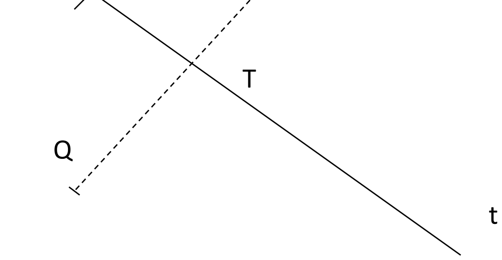
IDENTITÁS

Def: Olyan transzformáció, amely minden ponthoz önmagát rendeli, azaz minden pontja fixpont.

TÜKRÖZÉS EGYENESRE (Tengelyes tükrözés)

Def: Adott a síkon a t tengely.

- Ha a P pont illeszkedik a tengelyre, akkor a P pont képe önmaga.
- Ha a Q pont nem illeszkedik a tengelyre, akkor a képpontot a Q-ból a t tengelyre bocsátott merőlegesen, a tengely ellentétes oldalán, a tengelytől ugyanakkora távolságra kapjuk, mint a Q pont.



QT = Q'T

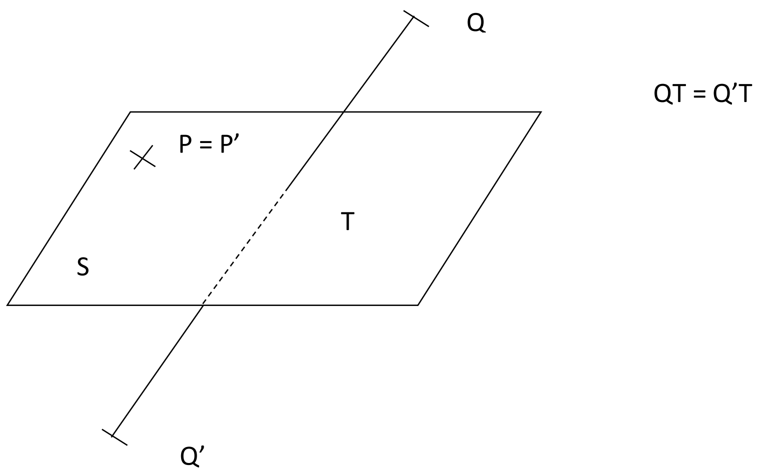
<u>Tulajdonságai:</u>

- távolságtartó
- egyenes képe egyenes
- szögtartó
- a tengely fixegyenes (azaz minden pontja fixpont)
- a körüljárási irány megváltozik

<u>TÜKRÖZÉS SÍKRA</u>

<u>Def:</u> Megadunk egy S síkot.

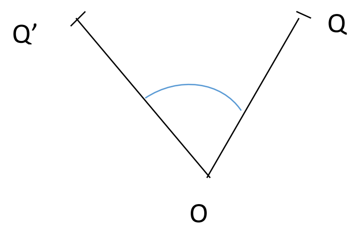
- Ha a P pont illeszkedik a síkra, akkor a képe önmaga.
- Ha a Q pont nem illeszkedik a síkra, akkor a Q' képpont az S síkra bocsátott merőlegesen, az S sík ellentétes oldalán, az S síktól ugyanakkora távolságra van, mint a Q pont.



PONT KÖRÜLI ELFORGATÁS A SÍKON

Def: Megadjuk a sík egy O pontját (az elforgatás középpontját), valamint nagyságával és irányával az elforgatás szögét: α

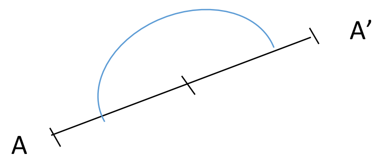
- Ha a P pont illeszkedik az O pontra, akkor a képe önmaga: az O pont fixpont.
- Ha a Q pont nem illeszkedik az O pontra, akkor a képe az adott síkon az a Q' pont, amelyre fennáll: OQ' = OQ és QOQ' szög nagysága és iránya megegyezik a megadott α szöggel.



Tulajdonságai:

- távolságtartó
- egyenes képe egyenes
- szögtartó
- az O pont fixpont
- a körüljárási irány nem változik meg

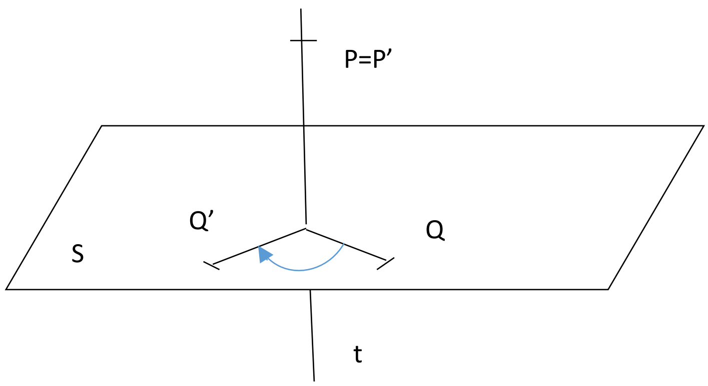
Ha α = +/- 180˚ akkor középpontos tükrözésről beszélünk. (Ezért a középpontos tükrözés nem önálló transzformáció, hanem a pont körüli forgatás speciális esete.)



TENGELY KÖRÜLI FORGATÁS

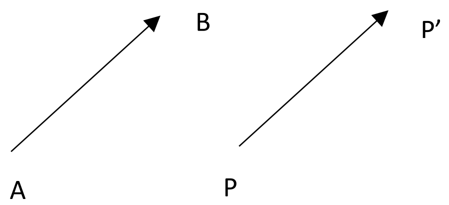
Def: Megadunk egy t tengelyt és a tengelyre merőleges síkban – nagyságával és irányával – az elforgatás α szögét.

- Ha a P pont illeszkedik a t tengelyre, akkor a képe önmaga, azaz fixpont.
- Ha a Q pont nem illeszkedik a t tengelyre, akkor a képe azon az S síkon van, amely merőleges a t tengelyre és illeszkedik a Q pontra.
  Ha az S sík és a t tengely metszéspontját O-val jelöljük, akkor a Q pont képe az S síknak az a Q' pontja, amelyre fennáll: OQ = OQ' és QOQ' szög nagyságával és irányával megegyezik a megadott α szöggel.



ELTOLÁS

Def: Meg kell adnunk egy $\vec{v}$ vektort. Legyen $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Tetszőleges P ponthoz azt a P' pontot rendeljük, melyre fennáll: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PP'}$.



Tulajdonságai:

- távolságtartó
- szögtartó
- párhuzamosságtartó
- nincs fixpont; $\left(ha\ \vec{v} \neq \vec{0}; ha\ \vec{v} = \vec{0}, akkor\ identitás\right)$

EGYBEVÁGÓSÁG

Def: Egybevágónak nevezünk két alakzatot, ha van olyan távolságtartó transzformáció, mely az egyik alakzatot a másikba viszi át.

Jele:≅

Alakzatok egybevágósága:

- Két kör egybevágó, ha sugaraik megegyeznek.
- Két háromszög egybevágó, ha a következő feltételek egyike teljesül:
  1. Oldalaik hossza páronként megegyezik.
  2. Két – két oldaluk hossza páronként megegyezik és az általuk közbezárt szögek megegyeznek.
  3. Egy – egy oldaluk hossza és az azokon fevő két – két szög páronként egyenlő.
  4. Két – két oldaluk hossza páronként egyenlő és a két – két oldal közül a hosszabbal szemközti szögek egyenlőek.
- Két sokszög egybrvágó, ha rájuk a következő feltételek egyike teljesül:
  1. Megfelelő oldalaik hossza és megfelelő átlóik hossza páronként egyenlő.
  2. Megfelelő oldalaik hossza és megfelelő szögeik páronként egyenlőek.

SZIMMETRIKUS ALAKZATOK

Def: Egy síkbeli alakzat tengelyesen szimmetrikus, ha az alakzat síkjában létezik olyan tengely, melyre vonatkozó tükrözésnél az alakzat képe önmaga.

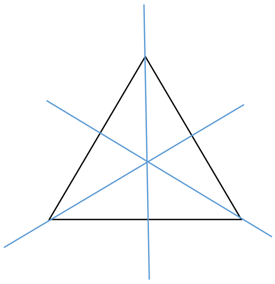
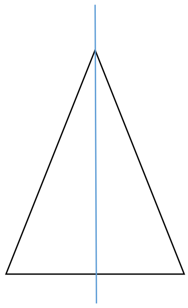
Def: Egy alakzat középpontosan szimmetrikus, ha létezik olyan pont, melyre vonatkozó tükrözésnél az alakzat képe önmaga.

Def: Egy alakzat forgásszimmetrikus, ha létezik olyan forgatás, amely az alakzatot önmagába viszi át.

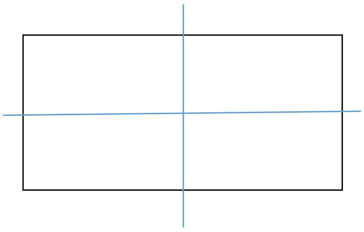
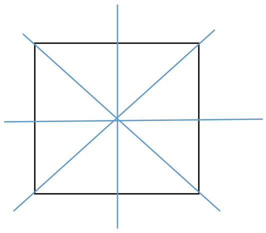
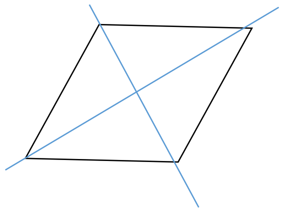
Def: Egy alakzat síkszimmetrikus, ha létezik olyan sík, amelyre vonatkozó tükrözésnél az alakzat képe önmaga.

Tengelyesen szimmetrikus síkidomok:

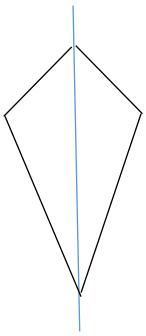
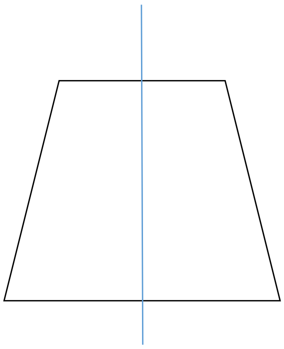
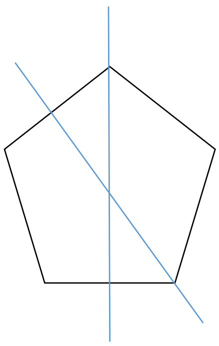
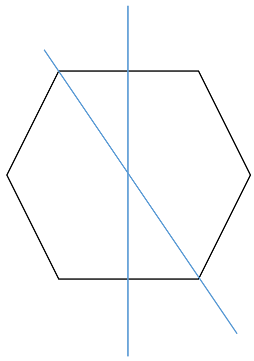
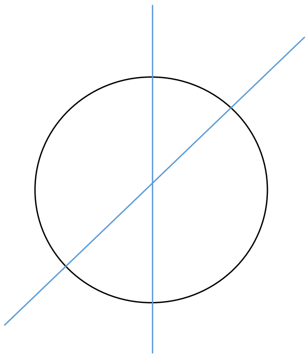
- *Egyenlő oldalú háromszög*: mind a három oldalfelező merőlegese szimmetriatengely.
- *Egyenlő szárú háromszög*: az alap felezőmerőlegese a szimmetriatengely (ez felezi a szárszöget is).

- *Téglalap*: a két középvonalára tengelyesen szimmetrikus.
- *Négyzet*: négy szimmetriatengelye van: a két átló és a két középvonal.
- *Rombusz*: a két átló a szimmetriatengely.

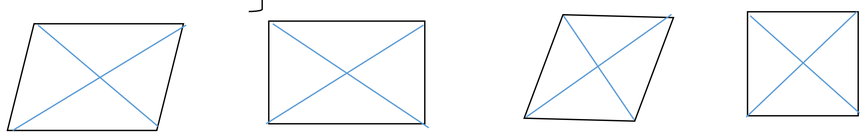
- *Deltoid*: az egyenlő oldalak közös pontjánál keletkező csúcsokat összekötő átló a szimmetriatengely.
- *Egyenlő szárú trapéz*: az alapok felezőpontját összekötő egyenes a szimmetriatengely.
- *Páros, illetve páratlan oldalszámú szabályos sokszög*: a szimmetriafeltételeket a szabályos sokszögeknél olvashatjuk.
- *Kör*: minden átmérőjére tengelyesen szimmetrikus.

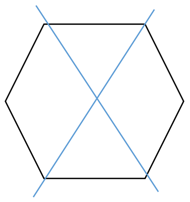
<u>Középpontosan szimmetrikus síkidomok:</u>

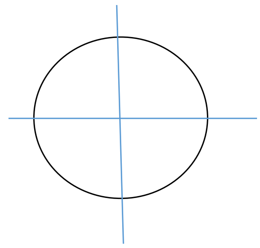
- *Paralelogramma*
- *Téglalp*
- *Rombusz*
- *Négyzet*

az átlók metszéspontjára középpontosan szimmetrikusak



- *Páros oldalszámú szabályos sokszög*
- *Kör:*a középpontjára középpntosan szimmetrikus





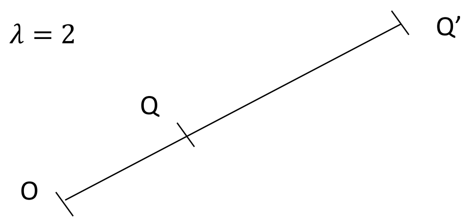
HASONLÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓK

Középpontos hasonlósági transzformáció

Def: Megadunk egy pontot, a középpontos hasonlósági transzformáció középpontját (legyen ez az O pont) és egy λ valós számot: $\lambda \neq 0$.

Valamely ponthoz a következő módon rendeljük a képét:

- Ha P = O, akkor a P pont képe önmaga.
- Ha $Q \neq O$, akkor a Q pont képe az $\overline{OQ}$ egyenesnek olyan Q' pontja, amelyre $\overline{OQ'} = |\lambda| \cdot \overline{OQ}$, mégpedig ha $\lambda > 0$, akkor Q' pont az $\overline{OQ}$ félegyenesen van; ha $\lambda < 0$, akkor Q' az $\overline{OQ}$egyenes Q-t nem tartalmazó félegyenesén van.



A λ számot a középpontos hasonlóság arányának nevezzük.

Ha $\lambda = 1 \rightarrow$ identitás.

Ha $\lambda = -1 \rightarrow$ középpontos tükrözés.

(Ha $|\lambda| > 1 \rightarrow$ nagyítás; ha $0 < |\lambda| < 1 \rightarrow$ kicsinyítés)

Tulajdonságai:

- A megadott O pont fixpont.
- Egyenesnek a középpontos hasonlósági transzformációval kapott képe az eredeti egyenessel párhuzamos egyenes. Ha az egyenes illeszkedik a hasonlóság középpontjára, akkor a képe önmaga.
- Szögtartó
- Aránytartó: Bármely szakasz képének és az eredeti szakasznak az aránya állandó.

Hasonlósági transzformáció

Def: A középpontos hasonlóság és az egybevágósági transzformáció szorzatát (egymás utáni végrehajtását) hasonlósági transzformációnak nevezzük.

A középpontos hasonlóságarányát a hasonlósági transzformáció arányának nevezzük.

Tulajdonságai:

- Egyenes képe egyenes.
- Szögtartó.
- Aránytartó.

Ha valamely transzformáció minden szakasznak a hosszát λ – szorosára változtatja (λ > 0), akkor az hasonlósági transzformáció.

Def: Hasonlónak nevezünk két alakzatot, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másikba viszi át.

Jele: ~

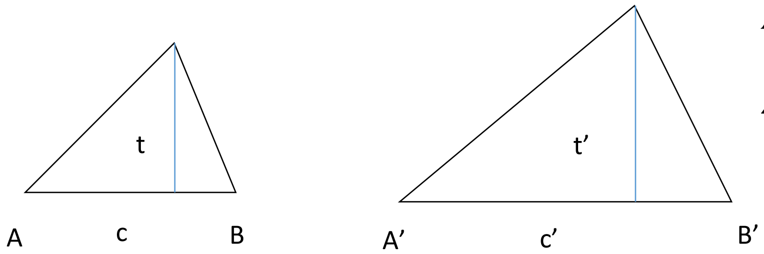
Alakzatok hasonlósága:

- Bármely két kör hasonló: $\lambda = \frac{R}{r}, illetve\ \lambda = \frac{r}{R}$.
- Két háromszög hasonló, ha a következő feltételek egyike teljesül:
  1. Megfelelő oldalaik hosszának aránya egyenlő:
     $$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$
  2. Két – két oldalhosszuk aránya egyenlő, és az ezek által közrefogott szögek egyenlők:
     $$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}\ \text{és}\ \gamma = \gamma'$$
  3. Két – két oldalhosszuk aránya egyenlő, és e két – két oldal közül a hosszabb oldalakkal szemközti szögek egyenlők:
     $$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}\ \ \text{és ha}\ a > b, \text{akkor}\ \alpha = \alpha'$$
  4. Két – két szögük páronként egyenlő: $\alpha = \alpha'\text{és}\ \beta = \beta'$.

- Két sokszög hasonló, ha a következő feltételek egyike teljesül:
  1. Megfelelő oldalaik és megfelelő átlóik hosszának aránya egyenlő.
  2. Megfelelő oldalaik aránya egyenlő és megfelelő szögeik páronként egyenlők.

Hasonló síkidomok területének aránya, hasonló testek térfogatának aránya

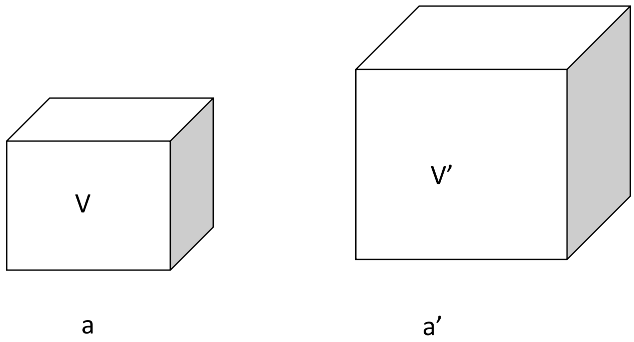
<u>Tétel:</u> Hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő.



$ABC\Delta \sim A'B'C'\Delta$

$\lambda = \frac{c}{c'} \rightarrow \lambda^2 = \frac{t}{t'}$

<u>Tétel:</u> Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbével egyenlő.



$\lambda = \frac{a}{a'} \rightarrow \lambda^3 = \frac{V}{V'}$

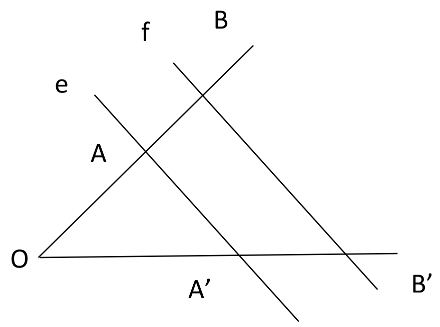
Párhuzamos szelők tétele:

Tétel: Ha egy szög szárát párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok aránya egyenlő a másik száron keletkező megfelelő szakaszok arányával.

Megfordítás: Ha két egyenes egy szög száraiból olyan szakaszokat vág le, amelyek aránya mindkét száron egyenlő, akkor a két egyenes párhuzamos.

Párhuzamos szelőszakaszok tétele:

Tétel: Egy szög szárait metsző párhuzamosokból a szárak által kimetszett szakaszok aránya megegyezik a párhuzamosok által az egyik szárból kimetszett szakaszok arányával.



$e \parallel f$

$AA' : BB' = OA : OB$

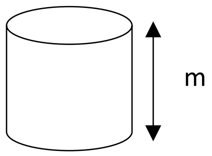
$OA : AB = OA' : A'B'$

Térmértan

Hengerszerű testek

Def. Hengerszerű testeknek nevezzük azokat a testeket, amelyeket úgy kaphatunk, hogy egy síkidom határoló vonalán önmagával párhuzamosan körülvezetünk egy olyan egyenest, amelynek egyetlen közös pontja van az alaplap síkjával, és a kapott palástot az eredeti síkidommal párhuzamos síkkal elmetsszük.

Minden hengerszerű test alaplapja és fedőlapja párhuzamos és egybevágó síkidom. Ezekkel egybevágó az alaplap síkjával párhuzamos minden síkmetszet.



Az alaplap és fedőlap síkjának távolságát a hengerszerű test magasságának nevezzük.

A körülvezetett egyenesnek az alaplap és fedőlap közötti szakaszát a test alkotójának mondjuk.

A hengerszerű test minden alkotója azonos hosszúságú.

- Ha a hengerszerű test alapja sokszög, akkor hasábnak mondjuk.
- Ha a hengerszerű test alapja kör, akkor körhengernek vagy röviden hengernek nevezzük.

Ha a körülvezetett egyenes merőleges az alaplap síkjára, akkor egyenes hengerszerű testnek mondjuk, ellenkező esetben ferde hengerszerű testről beszélünk.

Az egyenes hasábok közül azokat, amelyeknek az alapja szabályos sokszög, szabályos hasáboknak, vagy oszlopoknak mondjuk.

Az egyenes körhengert forgáshengernek is mondjuk.

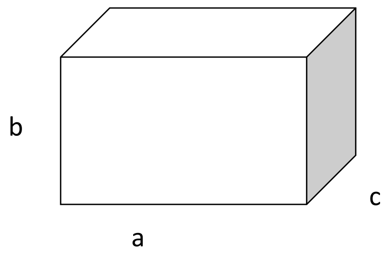
Tétel: Bármely hengerszerű test térfogatát megadja az alapterületének és a magasságának szorzata:

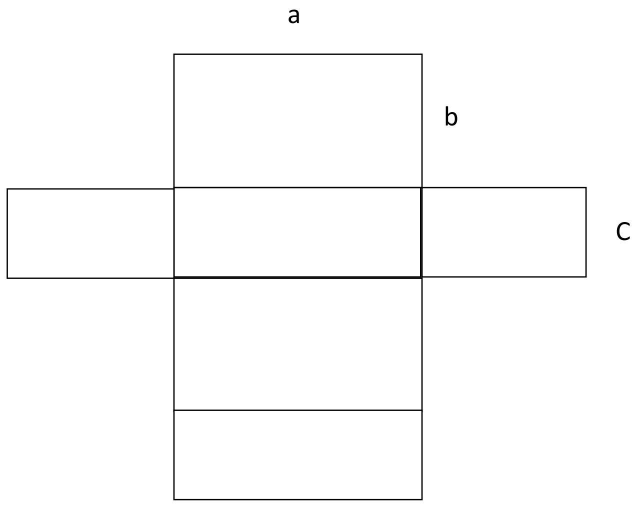
$$V = T \cdot M$$

Az egyenes hengerszerű test palástja a síkba kiteríthető. Az egyenes hengerszerű test felszíne:

$$A = 2 \cdot T + P = 2 \cdot T + k \cdot M$$

Téglatest:



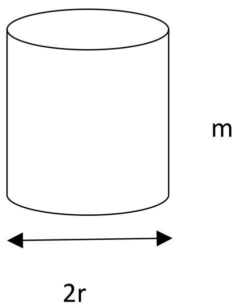


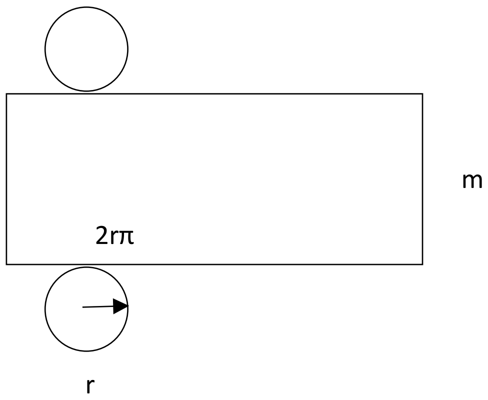
$V = a \cdot b \cdot c$

$A = 2(a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$

Kocka esetén: $V = a^3$ és $A = 6 \cdot a^2$

Henger:

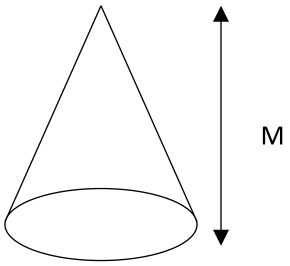




$\mathrm{V} = r^2 \cdot \pi \cdot m$ $\qquad A = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot m = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + m)$

Kúpszerű testek

Def: Kúpszerű testeknek azokat a testeket nevezzük, amelyeket úgy kaphatunk, hogy egy síkidom határoló vonalán körülvezetünk egy egyenest, amely állandóan illeszkedik egy adott pontra, a síkidom síkján kívüli csúcspontra.



A síkidomot a kúpszerű test alaplapjának nevezzük.

A csúcsnak az alaplap síkjától való távolsága a test magassága.

A csúcsot és az alaplap határoló vonalának egyik pontját összekötő szakasz a kúpszerű test egyik alkotója.

Azokat a kúpszerű testeket, amelyeknek alaplapja sokszög, gúláknak nevezzük, amelyeknek kör, azokat pedig kúpoknak.

A forgáskúp minden alkotója egyenlő hosszúságú. Az ilyen kúpot egyenes kúpnak is mondjuk. Azt a kúpot, amelynek nem minden alkotója egyenlő hosszúságú, ferde kúpnak nevezzük

A gúla csúcsát és a gúla alaplapjának egyik csúcspontját összekötő szakasz a gúla egyik oldaléle. Ha egy gúla alaplapja szabályos sokszög és minden oldaléle egyenlő hosszúságú, akkor azt szabályos gúlának nevezzük.

Bizonyítható, hogy ha egy gúla minden oldaléle egyenlő, akkor a gúla alaplapja egy körbe írható sokszög, és a kör középpontja a gúla csúcspontjának az alapon lévő merőleges vetülete.

Tétel: Bármely T alapterületű és M magasságú kúpszerű test térfogata: $V = \frac{T \cdot M}{3}$.

Bármely kúpszerű test palástja a síkba kiteríthető. A kúpszerű test felszíne: $A = T + P$

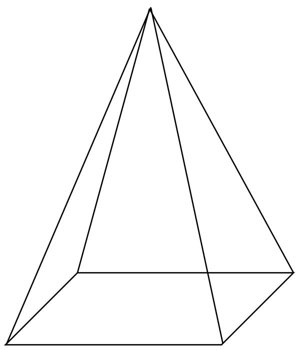
A gúlák palástja háromszögekből áll; az egyenes kúp palástja kiterítve egy körcikk.

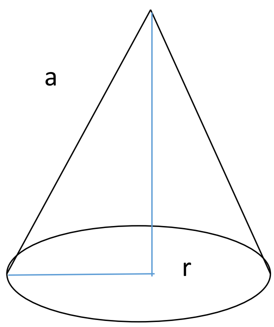
(Ferde kúp felszíne számunkra ismeretlen síkidom.)

A forgáskúp felszíne: $A = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot a$

$$A = T_{alap} + P$$

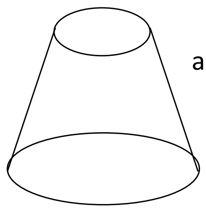
$$P = \frac{k \cdot a}{2}$$





<u>Csonkagúla, csonkakúp</u>

<u>Def:</u> Ha egy kúpszerű testet az alaplapjával párhuzamos síkkal elmetsszük, akkor a felső rész és az eredeti test egy C középpontú középpontos hasonlósági transzformációval egymásba átvihető, a felső rész egy kúpszerű test, az alsó rész pedig <u>csonkakúpszerű test</u> lesz. Ha az eredeti test gúla volt, akkor <u>csonkagúlának</u> nevezzük, ha pedig kúp volt, akkor <u>csonkakúpot</u> kapunk.



- A párhuzamos síkokban lévő lapokat <u>alaplapnak</u> és <u>fedőlapnak</u> nevezzük. Területük T, illetve t.
- A csonkagúla palástja trapézokból áll; a csonkakúp palástja körgyűrűcikk.
- Az eredeti – teljes kúp – alkotóinak a csonkakúppalástra illeszkedő szakaszát a <u>csonkakúp alkotóinak</u> nevezzük.
- A <u>szabályos csonkagúla</u> szabályos gúlából származik.
- Ha a csonkakúp egyenes kúpból származik, akkor <u>egyenes csonkakúpnak</u> mondjuk. Ennek minden alkotója egyenlő hosszú, tengelye merőleges az alapkörök síkjára. (Egy szimmetrikus trapéz szimmetria tengelye körüli forgatásával is előállítható.)→ az egyenes <u>csonkakúp tengelymetszete</u> szimmetrikus trapéz.
- A csonkakúpszerű test <u>magassága</u> az alaplap síkjának és a fedőlap síkjának távolsága.

<u>Tétel:</u> Ha a csonkagúla alaplapjainak területe T és t, valamint a magassága M, akkor térfogata:

$$V=\frac{M}{3}\left(T+\sqrt{Tt}+t\right).$$

<u>Tétel:</u> Ha a kör alaplapú csonkakúp alaplapjainak sugara R és r, valamint magassága M, akkor térfogata:

$$V=\frac{M\pi}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right).$$

<u>Tétel:</u> Ha a csonkakúp alaplapjának sugara R, fedőlapjának sugara r, alkotója *a*, akkor a felszíne:

$$A=R^2\pi+r^2\pi+(R+r)\pi a.$$

A gömb

Def: A gömbfelület olyan pontok halmaza a térben, melyek egy megadott O ponttól megadott r távolságra vannak.

$$G_{gömbfelület} = \{P |\ \overline{OP} = r;\ r\epsilon \boldsymbol{R}^{+}\}$$

Def: A gömbtest egy adott O ponttól megadott r távolságnál nem nagyobb távolságra lévő síkbeli pontok halmaza.

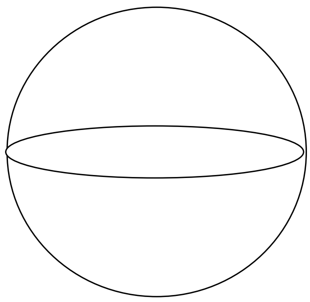
$$G_{gömbtest} = \{P |\ \overline{OP} \leq r;\ \ r\epsilon \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{R}^{-}\}$$

Tétel: Az r sugarú gömb térfogata:

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3.$$

Tétel: Az r sugarú gömb felszíne:

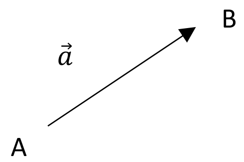
$$A = 4 \cdot r^2 \cdot \pi.$$



Vektorok

Def: A térben/síkon egy adott hosszúságú, adott állású és adott irányú szakaszokat vektoroknak nevezzük.

A vektor jellemzői: kezdőpontja, végpontja, hossza, azaz abszolútértéke, állása és iránya.



$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$

Def: Ha két vektorhoz található olyan egyenes, amely mindkettővel párhuzamos, akkor ezeket párhuzamos vektoroknak, vagy egyállású vektoroknak nevezzük.

- Két vektort egyenlőnek tekintünk, ha abstolútértékük egyenlő, párhuzamosak és azonos irányításúak; két vektor egyenlő, ha van olyan eltorlás, amellyel fedésbe hozhatók.
- A nullvektor hossza 0, iránya tetszőleges.
- Ha adott az $\vec{a}$ vektor, akkor a $-\vec{a}$ vektort az $\vec{a}$ ellentett vektorának nevezzük. Ez a vektor az $\vec{a}$ vektorral egyenlő hosszúságú, azzal párhuzamos, de ellentétes irányú.

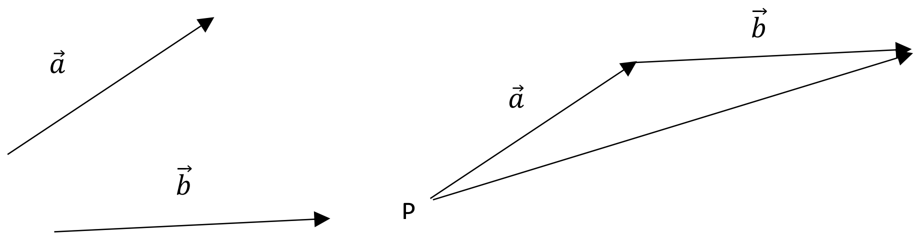
$$\overrightarrow{a +} (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

Def: Azokat a vektorokat nevezzük egysíkú vektoroknak, melyekhez létezik olyan sík, amellyekkel párhuzamosak.

Műveletek vektorokkal

1. Vektorok összegzése

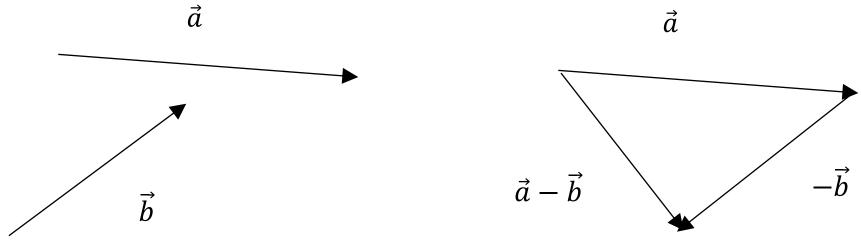
   Def: Adott ugyanabban a síkban az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor. A sík egy tetszőleges pontjából felmérjük az egyik vektort, majd ennek végpontjából kiindulva a másik vektort. A két vektor összege az a vektor, amelyet úgy kapunk, hogy az első vektor kezdőpontjából a másik vektor végpontjába mutató vektort megrajzoljuk.
   Az eljárás kettőnél több vektorra is alkalmazható.
   Két vektor összegzése elvégezhető az un. paralelogramma módszerrel is, ha a két vektor nem párhuzamos.



   Műveleti tulajdonságok:
   - Kommutatív művelet: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
   - Asszociatív művelet: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

2. Két vektor különbsége:

Def: Az $\vec{a}-\vec{b}$ különbségen az $\vec{a}+(-\vec{b})$ vektorösszeget értjük, azaz az $\vec{a}$ vektorhoz hozzáadjuk a b vektor ellentettjét, azaz a $-b$ vektort.



3. Vektor szorzása egy számmal, azaz skalárral:

Def: Adott az $\vec{a}$ vektor és egy λ valós szám.

- Ha az $\vec{a}$ nem nullvektor, akkor a $\lambda\vec{a}$ olyan vektor, melynek abszolutértéke $|\lambda||\vec{a}|$ és iránya pozitív λ esetén megegyezik az $\vec{a}$ irányával, negatív λ esetén az $\vec{a}$ vektor irányával ellentétes; $\lambda = 0$ esetén $\lambda\vec{a}$ nullvektor, azaz iránya tetszőleges.
- Ha $\vec{a} = \vec{0}$, akkor $\lambda\vec{a} = \vec{0}$, azaz nullvektort kapunk a λ-tól függetlenül.

(Amikor vektorok és számok együtt szerepelnek egy feladatban, akkor a számot skalárnak szoktuk nevezni.)

Műveleti tulajdonságok:

- A skalárral való szorzás kommutatív: $\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda$
- A szorzás a skalárokra nézve asszociatív: $\lambda\mu\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$
- Az összegből a vektortényező kiemelhető: $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a} = \vec{a}(\lambda + \mu)$
- A vektorösszeg tagonként szorozható a skalárral: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

4. Két vektor skaláris szorzata:

Def: Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ skaláris szorzatán az $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$ valós számot értjük, ahol γ a két vektor által bezárt szög. ($0° \leq \gamma \leq 180°$)

Műveleti tulajdonságok:

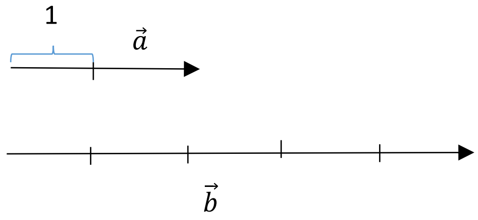
- Kommutatív: $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$
- Az összeadásra nézve disztributív: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$
- Skaláris szorzatokra fennáll: : $\lambda(\vec{a}\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\lambda\vec{b})$
- Egy vektor önmagával való skaláris szorzatát a vektor négyzetének nevezzük: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$
- Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor pozitív, ha egyik sem zérusvektor, és hajlásszögük ($0° \leq \gamma < 90°$)
- Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkornegatív, ha egyik sem zérusvektor, és hajlásszögük ($90 < \gamma \leq 180°$)

Tétel: Két vektor skaláris szorzata akkor és csakis akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

5. Vektor felbontása összetevőkre:

Tétel: Ha adott az $\vec{a}$ és a vele egyállású $\vec{b}$ vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$, akkor az $\vec{a}$ vektorból a $\vec{b}$ vektor előállítható skalárral történő szorzással.

- Azonos irányú $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok esetén: $\vec{b} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$.
- Ellentétes irányú irányú $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok esetén: $\vec{b} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$.



$$\frac{\vec{b}}{5} = \frac{\vec{a}}{2} \rightarrow \vec{b} = \frac{5}{2}\vec{a}$$

<u>Tétel:</u> Ha adott az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem egyállású vektorok, akkor bármely, velük egysíkú $\vec{v}$ vektor egyértelműen felbontható az adott vektorokkal egyállású összetevőkre, azaz egyértelműen felírható

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

alakban, ahol $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$.
Itt $\vec{a}$ *és* $\vec{b}$ bázisvektorok, $\alpha\vec{a}$ *és* $\beta\vec{b}$ pedig komponensek.

Az adott $\vec{a}$ *és* $\vec{b}$ vektorokkal, valamint az α *és* β valós számokkal képezhetjük a

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

vektort. Az így kapott $\vec{v}$ vektort az $\vec{a}$ *és* $\vec{b}$ vektorok lineáris kombinációjának nevezzük.

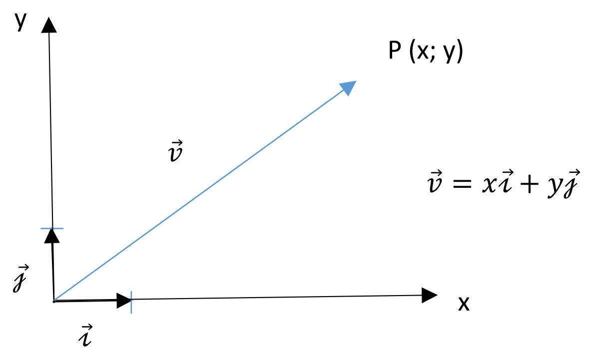
<u>Vektorok a koordinátasíkon</u>

<u>Def:</u> Ha adott egy O vonatkoztatási pont, akkor egy tetszőleges P pont egyértelműen meghatározható a vonatkoztatási pontból induló vektorral. Az ilyen vektort a P pont <u>helyvektor</u>ának nevezzük.

Ha a Descartes-féle koordinátarendszer pozitív x irányú $\vec{\imath}$ és pozitív yirányú $\vec{\jmath}$ egységvektorait tekintjük bázisvektoroknak, akkor a $\vec{v}$ vektor felírható

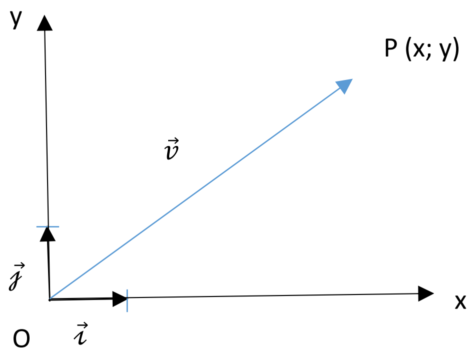
$$\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

alakban, ahol x és y egyértelműen meghatározott valós számok. Az (x; y) rendezett számpárt a $\vec{v}$ vektor koordinátáinak nevezzük az $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ bázisrendszerben.



Koordináta geometria

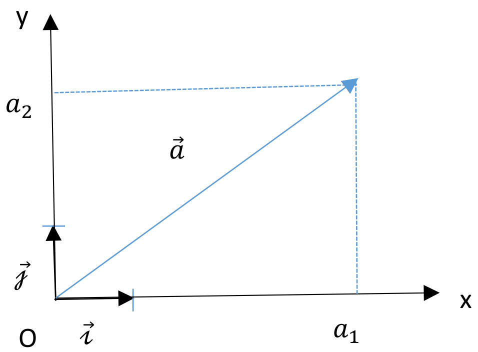
Geometriai problémákat a koordináta-síkon oldunk meg algebrai módszerekkel.



Bármely pont megadható a koordináta-rendszer origójából induló helyvektorral.

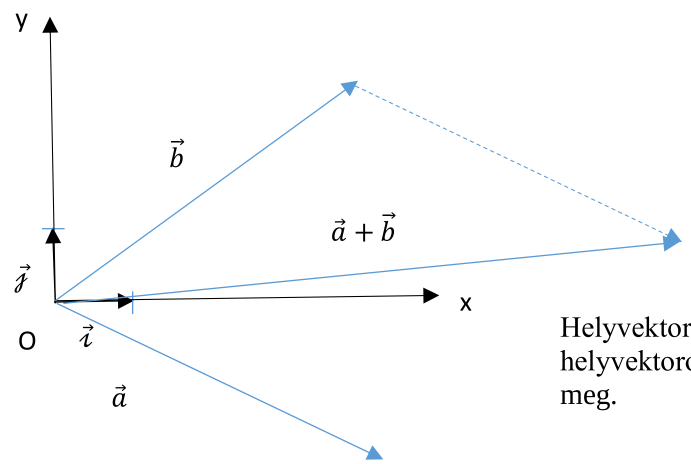
$$\overrightarrow{OP} = \vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

Egy vektor abszolútértékének meghatározása:



$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Vektorok összegének koordinátái:



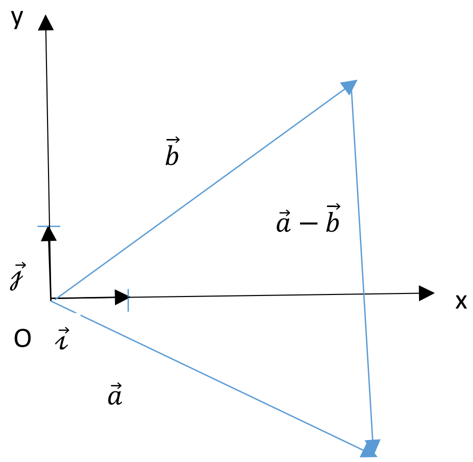
$\vec{a}\ (a_1;\ a_2)$

$\vec{b}\ (b_1;\ b_2)$

$\vec{a} + \vec{b}\ (a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)$

Helyvektorok összegének koordinátáit az egyes helyvektorok megfelelő koordinátáinak összege adja meg.

Két vektorok különbségének koordinátái:



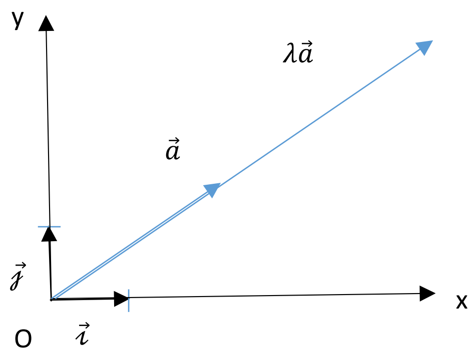
$\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$

$\vec{b}\,(b_1;\ b_2)$

$\vec{a}-\vec{b}\,\left(a_1-b_{1;}\,a_2-b_2\right)$

Helyvektorok különbségének koordinátáit az egyes helyvektorok megfelelő koordinátáinak különbsége adja meg.

Egy vektor skalárszorosának koordinátái:



$\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$

$\overrightarrow{\lambda a}\,(\lambda a_1; \lambda\, a_2)$

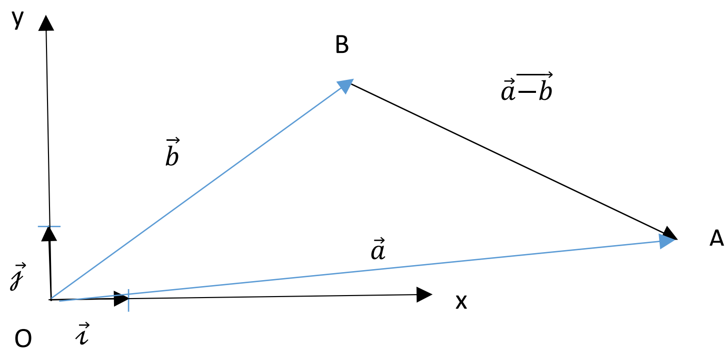
Helyvektorok skalárszorosának koordinátáit az egyes helyvektorok megfelelő koordinátáinak skalárszorosa adja meg.

Koordinátáival megadott két vektor skaláris szorzatának meghatározása:

Legyen adott: $\vec{a}\,\left(a_{1;}\,a_2\right)$ és $\vec{b}\,(b_1;\ b_2)\ \rightarrow \vec{a}\cdot\overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Két vektor skaláris szorzata egyenlő a megfelelő koordináták szorzatainak összegével.

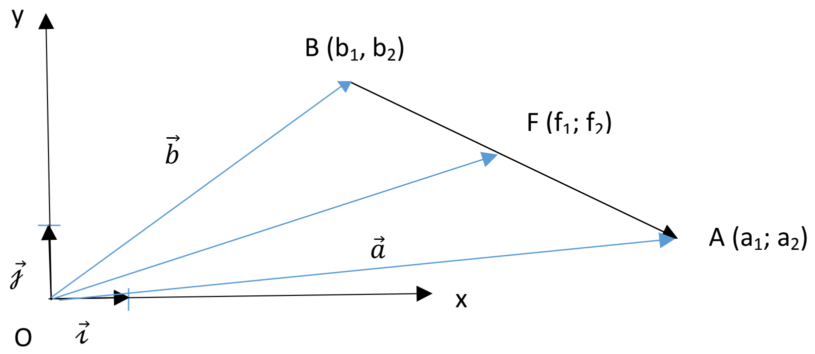
Szakasz hossza:



$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{a-b}$

$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2}$

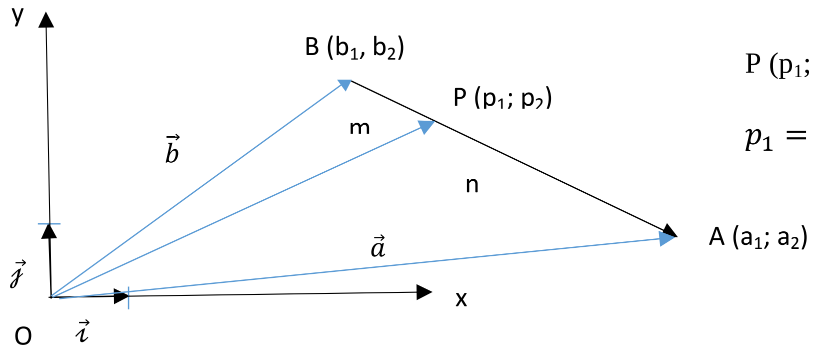
Szakasz felezőpontja:



F (f_1; f_2)

$f_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$; $f_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$

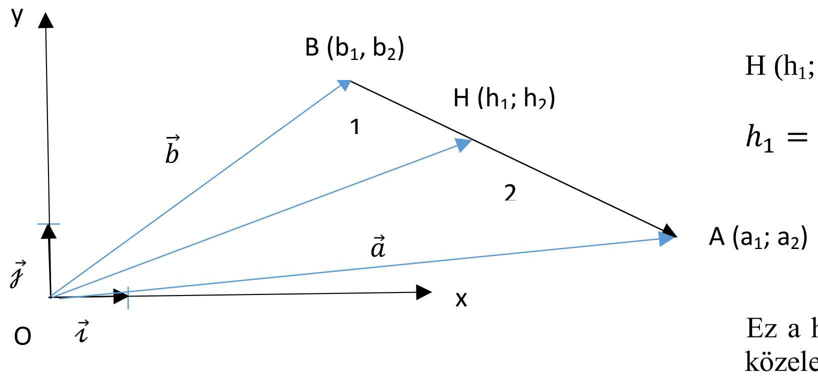
Szakasz adott arányú osztópontja:



P (p_1; p_2)

$p_1 = \frac{ma_1+nb_1}{n+m}$; $p_2 = \frac{ma_2+nb_2}{n+m}$

Szakasz harmadolópontja:



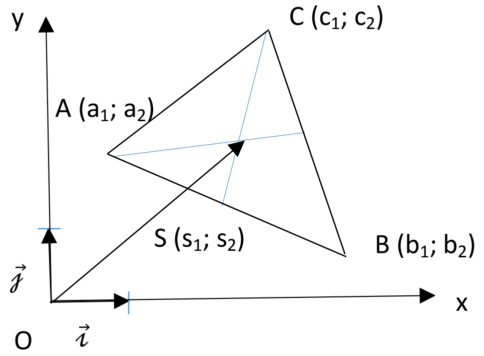
H (h_1; h_2)

$h_1 = \frac{a_1+2b_1}{3}$; $h_2 = \frac{a_2+2b_2}{3}$

Ez a harmadolópont a B ponthoz van közelebb.

A másik, A ponthoz közelebbi harmadolópont koordinátái: $h'_1 = \frac{2a_1+b_1}{3}$; $h'_2 = \frac{2a_2+b_2}{3}$.

A háromszög súlypontja:



$S\ (s_1;\ s_2)$

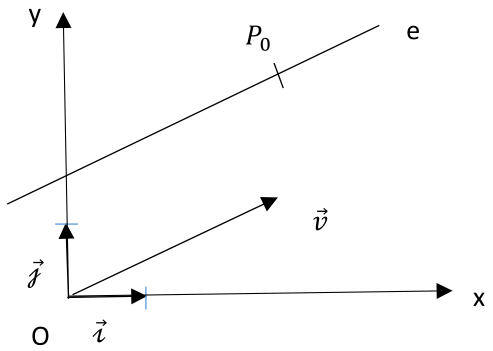
$s_1 = \frac{a_1+b_1+c_1}{3};\ s_2 = \frac{a_2+b_2+c_2}{3}$

Az egyenes helyzetét jellemző adatok:

Két különböző pont egyértelműen meghatároz egy egyenest. Ha az egyenesnek csak egy pontját adjuk meg, akkor nincs egyértlműen meghatározva. Még egy másik adatát is meg kell adni az egyértelműséghez. Ez az adat lehet:

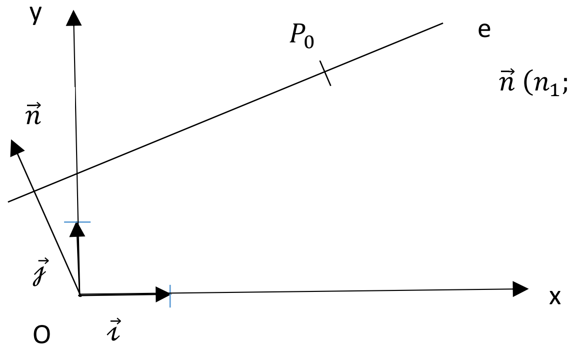
- egy vektor, mely párhuzamos az adott egyenessel;
- egy vektor, mely merőleges az adott egyenesre;
- egy szög, mely az egyenesnek valamely koordináta-tengellyel bezárt szöge;
- az egyértelműen meghatározott hajlásszög valamely megfelelő szögfüggvénye.

Def: Egy egyenes irányvektora az egyenessel egyállású bármely vektor, amely nem zérusvektor.



$\vec{v}\,(v_1;\ v_2)$

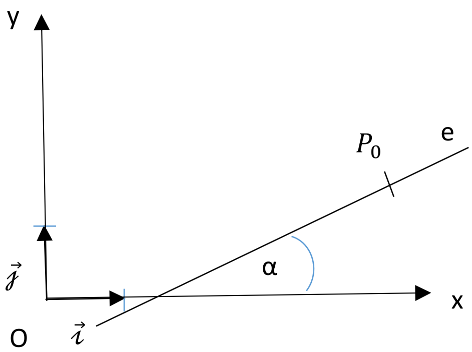
Def: Egy egyenes normálvektora az egyenesre merőleges bármely vektor, mely nem zérusvektor, és amely az egyenes síkjában – az (x; y) síkban – van.

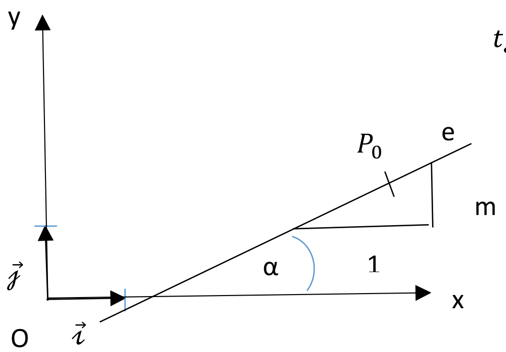


$\vec{n}\,(n_1;\ n_2) = \vec{n}\,(A, B)$

Def: Egy egyenes irányszögének nevezzük a koordináta-síkon az egyenes és az x tengely pozitív iránya által bezárt szögét.

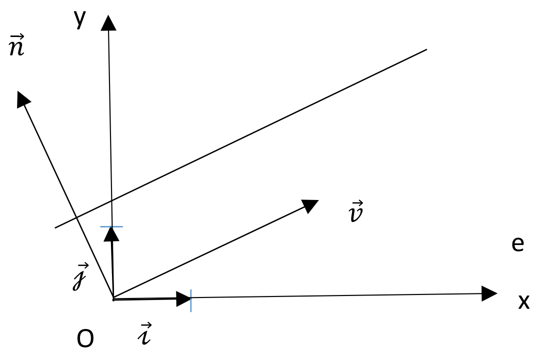
Def: A koordináta-síkon az egyenes irányszögének tangensét (ha létezik) az egyenes iránytangensének nevezzük.





$tg\alpha = m$

<u>Összefüggés az egyenes irányvektora, normálvektora és iránytangense között:</u>



$\vec{v}\ (v_1;\ v_2)$

$\vec{n}\ (A,\ B)$

$\vec{v}\ (v_1;\ v_2) = \vec{v}(-B; A)$

$\vec{n}\ (A,\ B) = \vec{n}(v_2;\ -v_1)$

$m = tg\ \alpha = \frac{v_2}{v_1} = -\frac{A}{B}$

Az m iránytangensű egyenes egy irányvektora $\vec{v}\ (1; m)$, egy normálvektora $\vec{n}\ (m, -1)$.

<u>Két egyenes párhuzamosságának és merőlegességének feltételei:</u>

<u>Ha két egyenes **párhuzamos**</u>, akkor

- irányvektoraik egyállásúak: $\overrightarrow{v_e} = c \cdot \overrightarrow{v_f}$
- normálvektoraik egyállásúak: $\overrightarrow{n_e} = c \cdot \overrightarrow{n_f}$
- irányszögeik egyenlők: $\alpha_e = \alpha_f$
- iránytangenseik (ha léteznek) egyenlők: $m_e = m_f$

<u>Fordítva is fennáll</u>, azaz ha

- két egyenes esetén az egyik irányvektora a másik irányvektorának (0-tól különböző) konstans-szorosa,
- két egyenes esetén az egyik normálvektora a másik normálvektorának (0-tól különböző) konstansszorosa,
- a két egyenes irányszöge egyenlő,
- a két egyenes iránytangenseik (ha léteznek) egyenlők,

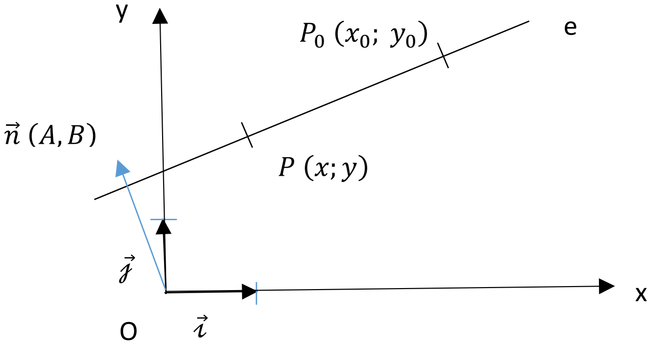
akkor a két egyenes párhuzamos.

<u>Ha két egyenes **merőleges**</u>, akkor

- irányvektoraik is merőlegesek egymásra, ezért azok skaláris szorzata 0: $\overrightarrow{v_e} \cdot \overrightarrow{v_f} = 0$,
- normálvektoraik is merőlegesek egymásra, ezért azok skaláris szorzata 0: $\overrightarrow{n_e} \cdot \overrightarrow{n_f} = 0$,
- iránytangenseik (ha léteznek) egymásnak ellenkező előjelű reciprokjai:$m_e = -\frac{1}{m_f}$.

<u>Tétel:</u> Iránytangenssel rendelkező egyenesek akkor és csakis akkor merőlegesek egymásra, ha iránytangenseik egymásnak ellenkező előjelű reciprokjai.

Az egyenes egyenlete:



$\vec{v} = \overrightarrow{P_0P}\ (x - x_0; y - y_0)$

$\vec{n}\ (A, B)$

$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$, mert merőlegesek.

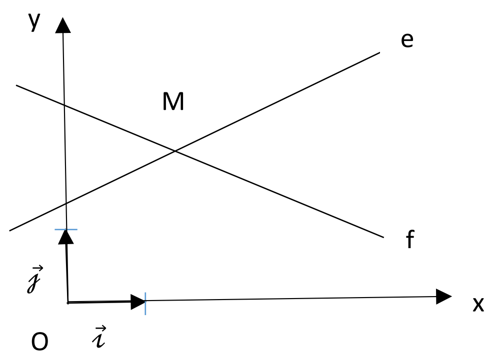
Az egyenes egyenlete a normálvektor koordinátáival felírva:

$Ax + By = Ax_0 + By_0.$

Az egyenes egyenlete az irányvektor koordinátáival felírva:

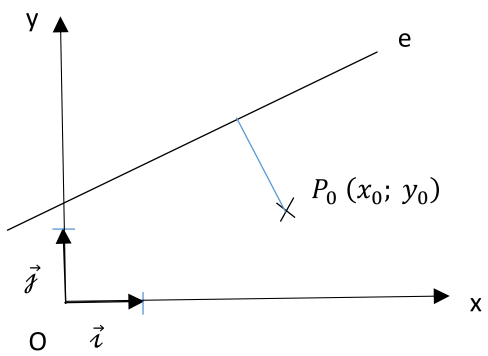
$v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0.$

Két egyenes metszéspontja:



Két egyenes metszéspontjának meghatározását a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása adja.

Pont és egyenes távolsága:

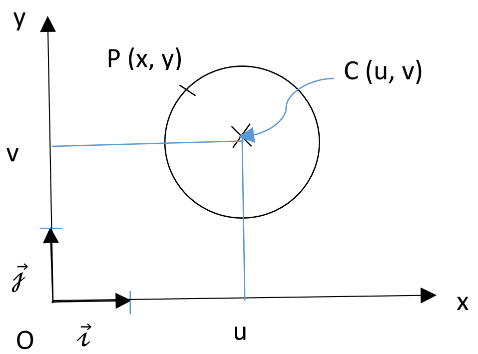


$e: Ax + By + C = 0$

$P_0\ (x_0;\ y_0)$

$d\ (P_0, e) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

A kör egyenlete:



Bármely körnek az egyenlete másodfokú, kétismeretlenes egyenlet:

$$(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$$

Nem minden másodfokú kétismeretlenes egyenlet lehet kör. A másodfokú, kétismeretlenes egyenlet általános alakja:

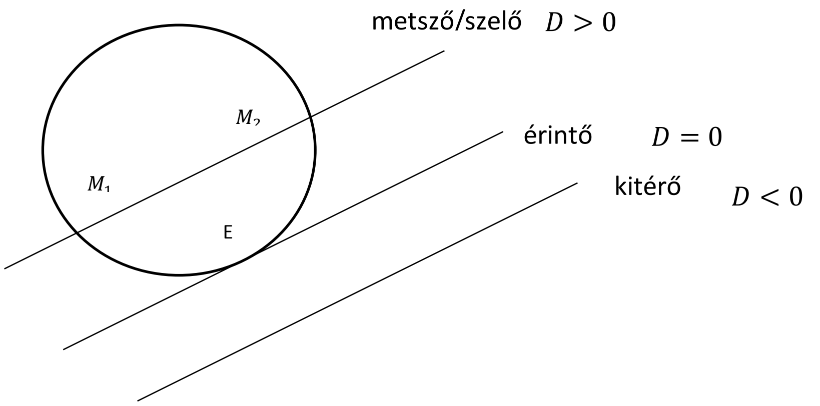
$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0.$$

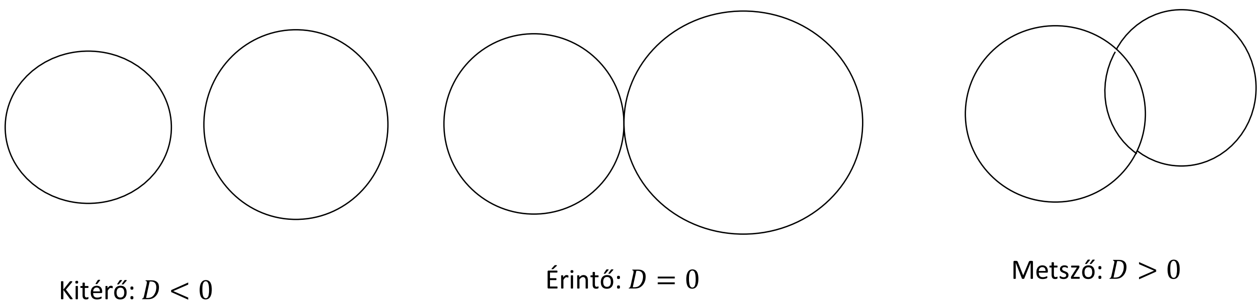
A következő feltételeknek kell teljesülnie:

- Nem lehet benne xy-os tag: $C=0$.
- Az x^2 és y^2 együtthatóinak azonosaknak kell lenniük: $A=B$, de nem lehet 0 az értékük.
- Teljes négyzetté történő alakítás során az $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$ alakra rendezve az egyenletet, a jobb oldalon pozitív számot kell kapnunk: $r^2>0$.

A kör és egyenes, illetve két kör kapcsolata:

Az egymást metsző kör és egyenes, illetve két metsző kör közös pontjainak meghatározásához olyan koordináta számpárokat kell keresnünk, melyek kielégítik mindkét alakzat egyenletét, azaz azadott egyenlet-rendszert kell megoldani.





Trigonometria

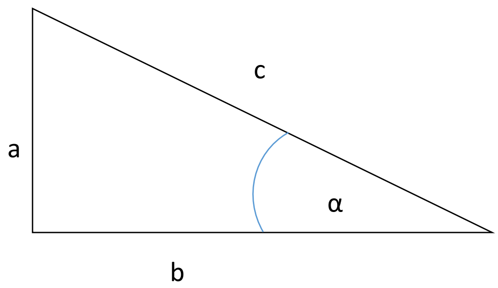
A hegyesszög szögfüggvényei (derékszögű háromszögben):

Def: A derékszögű háromszögben az α szög szinuszának nevezzük az α hegyesszöggel szemközti befogónak és az átfogónak az arányát.

Def: A derékszögű háromszögben az α szög koszinuszának nevezzük az α hegyesszög melletti befogónak és az átfogónak az arányát.

Def: A derékszögű háromszögben az α hegyesszög tangensének nevezzük az α hegyesszöggel szemközti befogónak és az α hegyesszög melletti befogónak az arányát.

Def: A derékszögű háromszögben az α hegyesszög kotangens
ének nevezzük az α hegyesszög melletti befogónak és az α hegyesszöggel szemközti befogónak az arányát.



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$

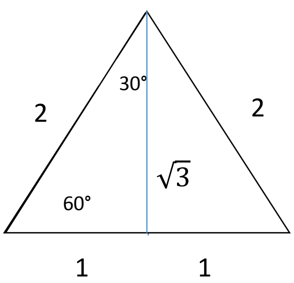
$\sec\alpha = \frac{c}{b}$

$\mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{c}{a}$

Pótszögek szögfüggvényei:

- Egy szög szinusza egyenlő pótszögének koszinuszával: $\sin\alpha = cos(90° - \alpha)$.
- Egy szög tangense egyenlő pótszögének kotangensével: $tg\ \alpha = ctg(90° - \alpha)$.

Nevezetes szögek szögfüggvényei:

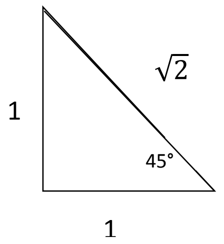


$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad$ $tg\ 60° = \sqrt{3}$

$ctg\ 30° = \sqrt{3}$ $\qquad$ $ctg\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$



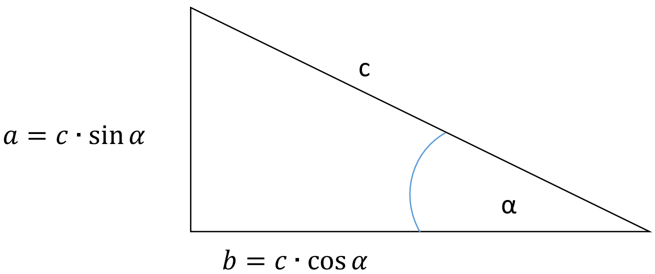
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ 45° = 1$

$ctg\ 45° = 1$

<u>Összefüggések egy hegyesszög szögfüggvényei között:</u>

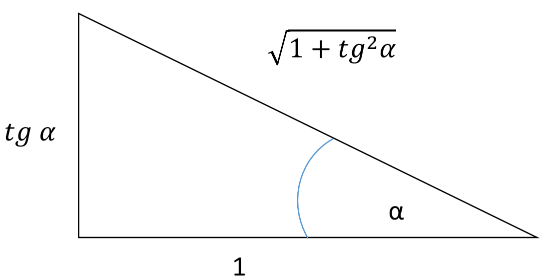


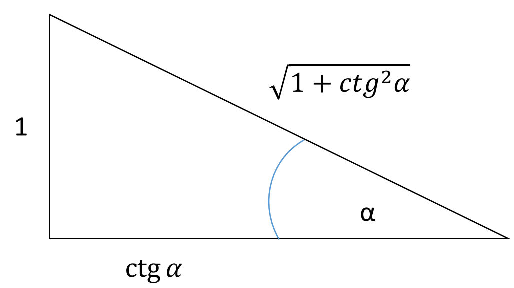
$$(c \cdot \sin\alpha)^2 + (c \cdot \cos\alpha)^2 = c^2$$

$$c^2 sin^2\alpha + c^2 cos^2\alpha = c^2 \qquad /: c^2$$

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

	sin	cos	tg	ctg
$\sin\alpha =$	-	$\sqrt{1 - cos^2\alpha}$	$\frac{tg\ \alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + ctg^2\alpha}}$
$\cos\alpha =$	$\sqrt{1 - sin^2\alpha}$	-	$\frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$	$\frac{ctg\ \alpha}{\sqrt{1 + ctg^2\alpha}}$
$tg\ \alpha =$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 - cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	-	$\frac{1}{ctg\alpha}$
$ctg\ \alpha =$	$\frac{\sqrt{1 - sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{tg\alpha}$	-

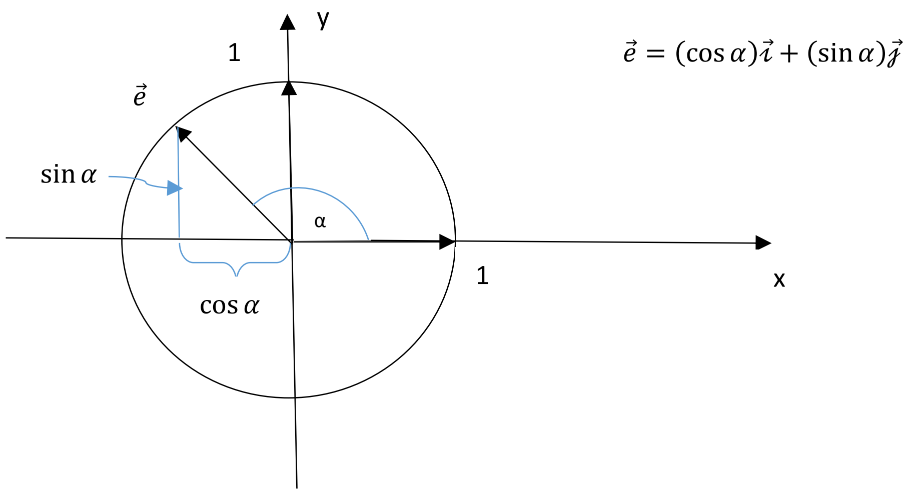




A szögfüggvények általános értelmezése

Def: Az α szög szinusza a koordináta-síkon az $\vec{\imath}$ vektortól α szöggel elforgatott egységvektor második koordinátája.

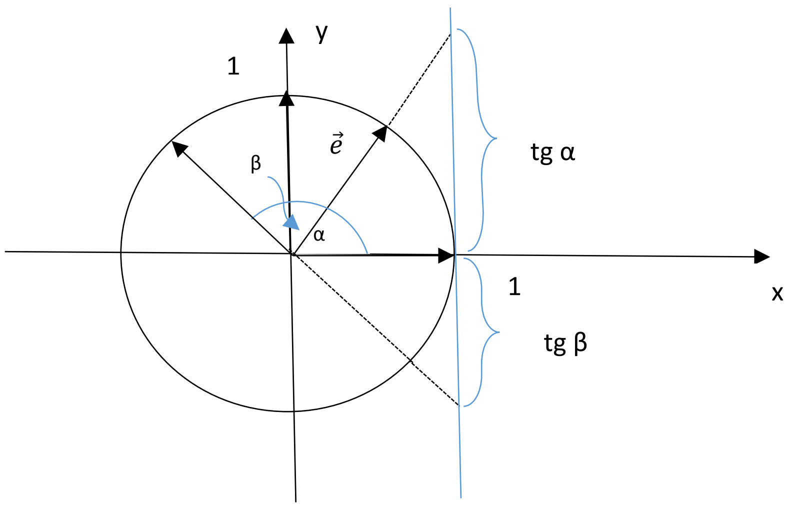
Def: Az α szög koszinusza a koordináta-síkon az $\vec{\imath}$ vektortól α szöggel elforgatott egységvektor első koordinátája.

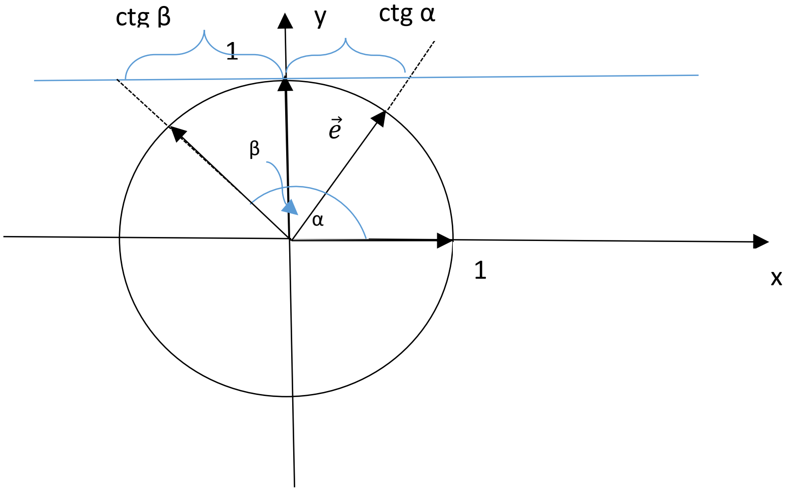


Def: Az α szög tangense a szög szinuszának és koszinuszának hányadosa, ha ennek a hányadosnak van értelme, azaz $\cos\alpha \neq 0$.

Def: Az α szög kotangense a szög koszinuszának és szinuszának hányadosa, ha ennek a hányadosnak van értelme, azaz $\sin\alpha \neq 0$.

$$tg\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ ha \cos\alpha \neq 0; \qquad ctg\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ ha \sin\alpha \neq 0.$$





Összefüggések a szögfüggvényértékek között:

- $\sin\alpha = \sin(\alpha + k \cdot 360°)$
- $\cos\alpha = \cos(\alpha + k \cdot 360°)$
- $tg\ \alpha = tg\ (\alpha + k \cdot 180°)$
- $ctg\ \alpha = ctg\ (\alpha + k \cdot 180°)$ $\qquad k \in \boldsymbol{Z}$

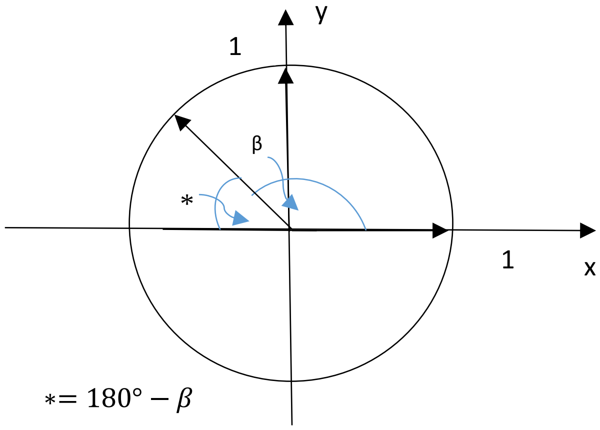
A szinusz és koszinusz szögfüggvényértékek 360°-onként, a tangens és kotangens szögfüggvényértékek 180°-onként periódikusan ismétlődnek.

A szögfüggvényértékek meghatározása az egyes síknegyedekben:

A szögfüggvényértékek az egyes tengelyeken:

α	sin α	cos α	tg α	ctg α
0°	0	1	0	-
90°	1	0	-	0
180°	0	-1	0	-
270°	-1	0	-	0
360°	0	1	0	-

- I. negyed: $0° < \alpha < 90°$: a definíció szerint számolunk.
- II. negyed: $90° < \beta < 180°$:



$*= 180° - \beta$

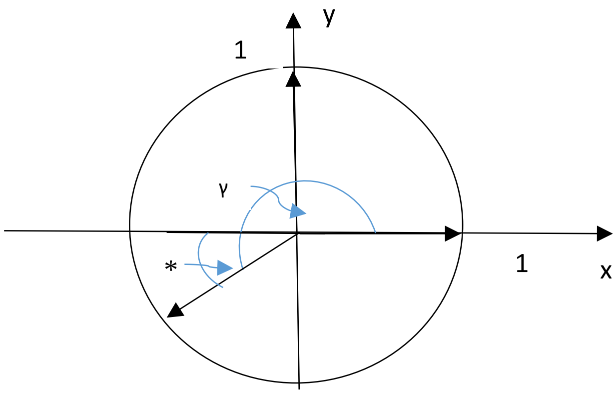
$\sin\beta = \sin(180° - \beta)$

$\cos\alpha = -\cos(180° - \beta)$

$tg\ \beta = tg\ (180° - \beta)$

$ctg\ \beta = ctg\ (180° - \beta)$

- III. negyed: $180° < \gamma < 270°$:



$*= \gamma - 180°$

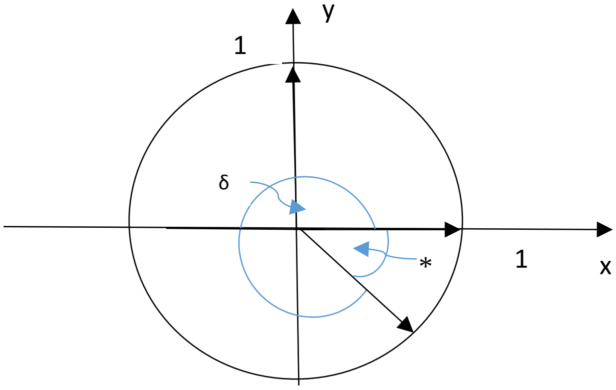
$\sin\gamma = -\sin(\gamma - 180°)$

$\cos\gamma = -\cos(\gamma - 180°)$

$tg\ \gamma = tg\ (\gamma - 180°)$

$ctg\ \gamma = ctg\ (\gamma - 180°)$

- IV. negyed: $270° < \delta < 360°$:



$$\sin\delta = -\sin(360° - \delta)$$

$$\cos\delta = \cos(360° - \delta)$$

$$tg\ \delta = -tg\ (360° - \delta)$$

$$ctg\ \delta = -ctg\ (360° - \delta)$$

$* = 360° - \delta$

<u>Negatív forgásszögek szögfüggvényei:</u>

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cos\alpha$$

$$cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sin\alpha$$

$$tg(-\alpha) = -tg\ \alpha$$

$$ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$$

$$tg\ \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = ctg\ \alpha \qquad \alpha \neq k \cdot \pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$$

$$\boldsymbol{ctg}\ \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = tg\ \alpha \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$$

Addíciós tételek

I. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$tg\ (\alpha+\beta) = \dfrac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha \cdot tg\ \beta}$ $\quad \alpha+\beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + l\pi; \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, \quad k, l, m\ \epsilon \boldsymbol{Z}$

$ctg\ (\alpha+\beta) = \frac{ctg\ \alpha \cdot ctg\ \beta - 1}{ctg\ \alpha + ctg\ \beta}$ $\quad \alpha+\beta \neq k\pi,\ \alpha \neq l\pi,\ \beta \neq m\pi,\ k, l, m\ \epsilon \boldsymbol{Z}$

II. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$tg\ (\alpha-\beta) = \dfrac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha \cdot tg\ \beta}$ $\quad \alpha-\beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + l\pi; \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, \quad k, l, m\ \epsilon \boldsymbol{Z}$

$ctg\ (\alpha-\beta) = \frac{ctg\ \alpha \cdot ctg\ \beta + 1}{ctg\ \alpha - ctg\ \beta}$ $\quad \alpha-\beta \neq k\pi,\ \alpha \neq l\pi,\ \beta \neq m\pi,\ k, l, m\ \epsilon \boldsymbol{Z}$

III. <u>2αszögfüggvényei:</u>

$\sin 2\alpha = 2sin\alpha \cdot cos\alpha$

$\cos 2\alpha = cos^2\ \alpha - sin^2\alpha$

$tg\ 2\alpha = \dfrac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\alpha}$

$ctg\ 2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha - 1}{2 \cdot ctg\ \alpha}$